Opérateurs de composition sur les espaces de Hardy généralisés

Elodie Pozzi

Laboratoire Paul Painlevé, Université Lille 1

en collaboration avec S. Elliott, J. Leblond (INRIA Sophia Antipolis) et E. Russ (Institut Joseph Fourier)

Journée du GDR AFHP (Lyon, 2013)

Plan

1. Espaces de Hardy généralisés

2. Opérateurs de composition

Plan

1. Espaces de Hardy généralisés

2. Opérateurs de composition

Cadre d'introduction de ces espaces

2010 L. Baratchart, J. Leblond, S. Rigat, E. Russ, introduits à l'origine pour résoudre un problème de Dirichlet pour l'équation $\overline{\partial} f = \nu \overline{\partial f}$, pour $\nu \in W^{1,\infty}_{\mathbb{R}}(\mathbb{D})$ avec une donnée au bord $g \in L^p(\mathbb{T})$.

2011 M. Efendiyev, E. Russ dans le cadre de $\mathbb{A}_{r_0} = \{z \in \mathbb{C} : r_0 < |z| < 1\}$.

2011 L. Baratchart, Y. Fischer, J. Leblond pour des domaines multi-connexes.

Notations

Soit $1 < p < \infty$. Soit $\mathbb{G} = \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ou $\mathbb{G} = \mathbb{A}_{r_0} = \{z \in \mathbb{C} : r_0 < |z| < 1\}$.
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

$\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace des fonctions C^∞ à support compact dans Ω,

$\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω.

Pour $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$,

$$\partial T = \partial_z T = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)T, \ \ \overline{\partial} T = \partial_{\overline{z}} T = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)T.$$

Notations

Soit $1 < p < \infty$. Soit $\mathbb{G} = \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ou $\mathbb{G} = \mathbb{A}_{r_0} = \{z \in \mathbb{C} : r_0 < |z| < 1\}$. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

$$\mathcal{D}(\Omega) \text{ est l'espace des fonctions } C^\infty \text{ à support compact dans } \Omega,$$

$$\mathcal{D}'(\Omega) \text{ l'espace des distributions sur } \Omega.$$

Pour $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$,

$$\partial T = \partial_z T = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)T, \ \ \overline{\partial} T = \partial_{\overline{z}} T = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)T.$$

$$W^{1,p}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} : f, \partial f, \overline{\partial} f \in L^p(\Omega)\},$$

où les dérivées sont au sens des distributions ; muni de

$$\|f\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} = \|f\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\partial f\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\overline{\partial} f\|^p_{L^p(\Omega)}.$$

Notations

Soit $1 < p < \infty$. Soit $\mathbb{G} = \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ou $\mathbb{G} = \mathbb{A}_{r_0} = \{z \in \mathbb{C} : r_0 < |z| < 1\}$. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

$\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace des fonctions C^∞ à support compact dans Ω,

$\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω.

Pour $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$,

$$\partial T = \partial_z T = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)T, \ \ \overline{\partial} T = \partial_{\overline{z}} T = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)T.$$

$$W^{1,p}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} : f, \partial f, \overline{\partial} f \in L^p(\Omega)\},$$

où les dérivées sont au sens des distributions ; muni de

$$\|f\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} = \|f\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\partial f\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\overline{\partial} f\|^p_{L^p(\Omega)}.$$

$W^{1,\infty}(\Omega)$ l'espace des fonctions bornées, lipschitziennes sur Ω et qui s'étendent continûment à $\overline{\Omega}$.

Les espaces H^p_ν : définition

Soit $1 < p < \infty$. Soit $\nu \in W^{1,\infty}_{\mathbb{R}}(\mathbb{G})$ tel que $\|\nu\|_{L^\infty(\mathbb{G})} \leq \kappa$, $\kappa \in (0,1)$.

Les espaces H^p_ν : définition

Soit $1 < p < \infty$. Soit $\nu \in W^{1,\infty}_{\mathbb{R}}(\mathbb{G})$ tel que $\|\nu\|_{L^\infty(\mathbb{G})} \leq \kappa$, $\kappa \in (0,1)$.

$$\begin{aligned} H^p_\nu(\mathbb{G}) \quad = \quad & \Big\{ f : \mathbb{G} \to \mathbb{C} \text{ mesurables}, \ \overline{\partial} f = \nu \overline{\partial f} \text{ dans } \mathcal{D}(\mathbb{G}), \\ & \qquad \|f\|_{H^p_\nu(\mathbb{G})} = \operatorname{ess\,sup}_{a<r<1} \|f\|_{L^p(r\mathbb{T})} < \infty \Big\}, \end{aligned}$$

où $a = 0$ si $\mathbb{G} = \mathbb{D}$ et $a = r_0$ si $\mathbb{G} = \mathbb{A}_{r_0}$.

Les espaces H^p_ν : définition

Soit $1 < p < \infty$. Soit $\nu \in W^{1,\infty}_{\mathbb{R}}(\mathbb{G})$ tel que $\|\nu\|_{L^\infty(\mathbb{G})} \le \kappa$, $\kappa \in (0,1)$.

$$\begin{aligned} H^p_\nu(\mathbb{G}) \quad = \quad & \Big\{ f : \mathbb{G} \to \mathbb{C} \text{ mesurables, } \overline{\partial} f = \nu \overline{\partial f} \text{ dans } \mathcal{D}(\mathbb{G}), \\ & \qquad \|f\|_{H^p_\nu(\mathbb{G})} = \operatorname{ess\,sup}_{a<r<1} \|f\|_{L^p(r\mathbb{T})} < \infty \Big\}, \end{aligned}$$

où $a = 0$ si $\mathbb{G} = \mathbb{D}$ et $a = r_0$ si $\mathbb{G} = \mathbb{A}_{r_0}$.

Remarque

- *$\|.\|_{H^p_\nu(\mathbb{G})}$ est une norme sur $H^p_\nu(\mathbb{G})$; $H^p_\nu(\mathbb{G})$ est un $\mathbb{R}$-espace de Banach pour $\|.\|_{H^p_\nu(\mathbb{G})}$.*
- *Pour $\nu = 0$, $H^p_\nu(\mathbb{G}) = H^p(\mathbb{G})$ (espace réel), où*

$$H^p(\mathbb{G}) = \left\{ f : \mathbb{G} \to \mathbb{C} \text{ analytique } \|f\|_{H^p_\nu(\mathbb{G})} = \sup_{a<r<1} \|f\|_{L^p(r\mathbb{T})} < \infty \right\},$$

où $a = 0$ si $\mathbb{G} = \mathbb{D}$ et $a = r_0$ si $\mathbb{G} = \mathbb{A}_{r_0}$.

Les espaces G_α^p-(partie I)

Les espaces G^p_α-(partie I)

Soit $\alpha \in L^\infty(\mathbb{G})$.

$$\begin{aligned} G^p_\alpha(\mathbb{G}) \quad = \quad & \Big\{\omega : \mathbb{G} \to \mathbb{C} \text{ mesurables}, \overline{\partial}\,\omega = \alpha\,\overline{\omega} \text{ dans } \mathcal{D}(\mathbb{G}), \\ & \qquad \|\omega\|_{G^p_\alpha(\mathbb{G})} = \operatorname{ess\,sup}_{a<r<1} \|\omega\|_{L^p(r\mathbb{T})} < \infty\Big\}, \end{aligned}$$

où $a = 0$ si $\mathbb{G} = \mathbb{D}$ et $a = r_0$ si $\mathbb{G} = \mathbb{A}_{r_0}$.

Les espaces G_α^p-(partie I)

Soit $\alpha \in L^\infty(\mathbb{G})$.

$$G_\alpha^p(\mathbb{G}) = \Big\{\omega : \mathbb{G} \to \mathbb{C} \text{ mesurables}, \overline{\partial}\,\omega = \alpha\,\overline{\omega} \text{ dans } \mathcal{D}(\mathbb{G}), \\ \|\omega\|_{G_\alpha^p(\mathbb{G})} = \operatorname{ess\,sup}_{a<r<1} \|\omega\|_{L^p(r\mathbb{T})} < \infty\Big\},$$

où $a = 0$ si $\mathbb{G} = \mathbb{D}$ et $a = r_0$ si $\mathbb{G} = \mathbb{A}_{r_0}$.

Remarque

- $\|.\|_{G_\alpha^p(\mathbb{G})}$ *est une norme sur* $G_\alpha^p(\mathbb{G})$; $G_\alpha^p(\mathbb{G})$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace de Banach pour* $\|.\|_{G_\alpha^p(\mathbb{G})}$.
- *Pour* $\alpha = 0$, $G_\alpha^p(\mathbb{G}) = H^p(\mathbb{G})$ *(espace réel).*

Les espaces G^p_α-(partie I)

Soit $\alpha \in L^\infty(\mathbb{G})$.

$$\begin{aligned} G^p_\alpha(\mathbb{G}) &= \Big\{\omega : \mathbb{G} \to \mathbb{C} \text{ mesurables, } \overline{\partial}\omega = \alpha\overline{\omega} \text{ dans } \mathcal{D}(\mathbb{G}), \\ & \qquad \|\omega\|_{G^p_\alpha(\mathbb{G})} = \operatorname{ess\,sup}_{a<r<1} \|\omega\|_{L^p(r\mathbb{T})} < \infty\Big\}, \end{aligned}$$

où $a = 0$ si $\mathbb{G} = \mathbb{D}$ et $a = r_0$ si $\mathbb{G} = \mathbb{A}_{r_0}$.

Remarque

- *$\|.\|_{G^p_\alpha(\mathbb{G})}$ est une norme sur $G^p_\alpha(\mathbb{G})$; $G^p_\alpha(\mathbb{G})$ est un $\mathbb{R}$-espace de Banach pour $\|.\|_{G^p_\alpha(\mathbb{G})}$.*
- *Pour $\alpha = 0$, $G^p_\alpha(\mathbb{G}) = H^p(\mathbb{G})$ (espace réel).*

Résultat de factorisation.

Théorème (L. Baratchart, J. Leblond, S. Rigat, E. Russ)

Soit $\omega \in G^p_\alpha(\mathbb{G})$. Alors, il existe $s \in W^{1,l}(\mathbb{G})$, $l \in (1, \infty)$, continu sur $\overline{\mathbb{G}}$ et $F \in H^p(\mathbb{G})$ tel que

$$\omega = e^s F.$$

De plus, $\|s\|_{L^\infty(\mathbb{G})} \lesssim \|\alpha\|_{L^\infty(\mathbb{G})}$.

Les espaces G^p_α-(partie II)

Une "réciproque" du résultat de factorisation.

Théorème (L. Batachart, A. Borichev, S. Chaabi, preprint 2013/ S. Elliott, J. Leblond, E.P., E. Russ, preprint 2013)

Soient $F \in H^p(\mathbb{G})$ et $\alpha \in L^\infty(\mathbb{G})$. Alors, il existe $s \in W^{1,l}(\mathbb{G})$, $l \in (2, \infty)$ tel que $e^s F \in G^p_\alpha(\mathbb{G})$.

Les espaces G^p_α-(partie II)

Une "réciproque" du résultat de factorisation.

Théorème (L. Batachart, A. Borichev, S. Chaabi, preprint 2013/ S. Elliott, J. Leblond, E.P., E. Russ, preprint 2013)

Soient $F \in H^p(\mathbb{G})$ et $\alpha \in L^\infty(\mathbb{G})$. Alors, il existe $s \in W^{1,l}(\mathbb{G})$, $l \in (2,\infty)$ tel que $e^s F \in G^p_\alpha(\mathbb{G})$.

Lien entre les espaces H^p_ν et G^p_α. Soient $\nu \in W^{1,\infty}_{\mathbb{R}}(\mathbb{G})$ et $\alpha \in L^\infty(\mathbb{G})$ tels que

$$\alpha = \frac{-\overline{\partial}\nu}{1-\nu^2}.$$

Alors

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{J} : H^p_\nu(\mathbb{G}) & \longrightarrow & G^p_\alpha(\mathbb{G}) \\ f & \longmapsto & \frac{f-\nu\overline{f}}{\sqrt{1-\nu^2}} \end{array}$$

est un $\mathbb{R}$ isomorphisme.

Propriétés des fonctions de G^p_α et H^p_ν-(partie I)

Proposition (L.Baratchart, J.Leblond, S.Rigat, E.Russ (2010)/ M. Efendiyev, E. Russ (2011))

Soit $\omega \in G^p_\alpha(\mathbb{G})$.

1. *Toute fonction* $\omega \in G^p_\alpha(\mathbb{G})$ *admet une limite radiale presque partout sur* $\partial\mathbb{G}$*, notée* $tr(\omega)$*,*
2. $tr(\omega) \in L^p(\partial\mathbb{G})$
3. *Les normes* $\|.\|_{G^p_\alpha(\mathbb{G})}$ *et* $\|tr.\|_{L^p(\partial\mathbb{G})}$ *sont équivalentes.*
4. *L'espace des limites radiales des fonctions de* $G^p_\alpha(\mathbb{G})$ *est noté* $tr\, G^p_\alpha(\mathbb{G})$.
5. *Toute fonction* $\omega \in G^p_\alpha(\mathbb{G})$ *est telle que* $|\omega|^p$ *admet un majorant harmonique.*
6. *Toute fonction* $\omega \in G^p_\alpha(\mathbb{G})$ *est continue dans* $\mathbb{G}$.

Propriétés des fonctions de G_α^p et H_ν^p-(partie II)

Proposition (L.Baratchart, J.Leblond, S.Rigat, E.Russ (2010)/ M. Efendiyev, E. Russ (2011))

Soit $f \in H_\nu^p(\mathbb{G})$.

1. *Toute fonction* $f \in H_\nu^p(\mathbb{G})$ *admet une limite radiale presque partout sur* $\partial\mathbb{G}$, *notée* $tr(f)$,
2. $tr(f) \in L^p(\partial\mathbb{G})$.
3. *Les normes* $\|.\|_{H_\nu^p(\mathbb{G})}$ *et* $\|tr.\|_{L^p(\partial\mathbb{G})}$ *sont équivalentes.*
4. *L'espace des limites radiales des fonctions de* $H_\nu^p(\mathbb{G})$ *est noté* $tr\, H_\nu^p(\mathbb{G})$.
5. *Toute fonction* $f \in H_\nu^p(\mathbb{G})$ *est telle que* $|f|^p$ *admet un majorant harmonique.*
6. *Toute fonction* $f \in H_\nu^p(\mathbb{G})$ *est continue dans* $\mathbb{G}$.

Définitions sur des domaines conformément équivalents

Proposition (L.Baratchart, J.Leblond, S.Rigat, E.Russ)

Soient $\mathbb{G} = \mathbb{D}$ *et* Ω *un domaine borné simplement connexe Dini-smooth. Soient* $\phi : \mathbb{D} \to \Omega$ *une transformation conforme,* $\nu \in W^{1,\infty}_{\mathbb{R}}(\Omega)$.

$$f \in H^p_\nu(\Omega) \Longleftrightarrow f \circ \phi \in H^p_{\nu\circ\phi}(\mathbb{D}),$$

et

$$\omega \in G^p_\alpha(\Omega) \Longleftrightarrow \omega \circ \phi \in G^p_{(\alpha\circ\phi)\overline{\partial\phi}}(\mathbb{D}).$$

Définitions sur des domaines conformément équivalents

Proposition (L.Baratchart, J.Leblond, S.Rigat, E.Russ)

Soient $\mathbb{G} = \mathbb{D}$ *et* Ω *un domaine borné simplement connexe Dini-smooth. Soient* $\phi : \mathbb{D} \to \Omega$ *une transformation conforme,* $\nu \in W^{1,\infty}_{\mathbb{R}}(\Omega)$*.*

$$f \in H^p_\nu(\Omega) \Longleftrightarrow f \circ \phi \in H^p_{\nu\circ\phi}(\mathbb{D}),$$

et

$$\omega \in G^p_\alpha(\Omega) \Longleftrightarrow \omega \circ \phi \in G^p_{(\alpha\circ\phi)\overline{\partial\phi}}(\mathbb{D}).$$

Mêmes résultats pour $\mathbb{G} = \mathbb{A}_{r_0}$ et Ω un domaine conformément équivalent à $\mathbb{A}_{r_0}$ et pour $G^p_\alpha(\mathbb{G})$.

Définitions sur des domaines équivalents

Proposition (L.Baratchart, J.Leblond, S.Rigat, E.Russ)

Soient $\mathbb{G} = \mathbb{D}$ et Ω un domaine borné simplement connexe et Dini-smooth. Soient $\phi : \mathbb{D} \to \Omega$ une transformation conforme, $\nu \in W^{1,\infty}_{\mathbb{R}}(\Omega)$.

$$f \in H^p_\nu(\Omega) \Longleftrightarrow \underbrace{f \circ \phi}_{\mathbf{C}_\phi(\mathbf{f})} \in H^p_{\nu\circ\phi}(\mathbb{D}),$$

et

$$\omega \in G^p_\alpha(\Omega) \Longleftrightarrow \underbrace{\omega \circ \phi}_{\widetilde{\mathbf{C}_\phi}(\omega)} \in G^p_{(\alpha\circ\phi)\overline{\partial\phi}}(\mathbb{D}).$$

Mêmes résultats pour $\mathbb{G} = \mathbb{D}$ et Ω un domaine conformément équivalent à $\mathbb{A}_{r_0}$ et pour $G^p_\alpha(\mathbb{G})$.

Définitions sur des domaines équivalents

Proposition (L.Baratchart, J.Leblond, S.Rigat, E.Russ)

Soient $\mathbb{G} = \mathbb{D}$ et Ω un domaine borné simplement connexe et Dini-smooth. Soient $\phi : \mathbb{D} \to \Omega$ une transformation conforme, $\nu \in W^{1,\infty}_{\mathbb{R}}(\Omega)$.

$$f \in H^p_\nu(\Omega) \Longleftrightarrow \underbrace{f \circ \phi}_{\mathbf{C}_\phi(\mathbf{f})} \in H^p_{\nu\circ\phi}(\mathbb{D}),$$

et

$$\omega \in G^p_\alpha(\Omega) \Longleftrightarrow \underbrace{\omega \circ \phi}_{\widetilde{\mathbf{C}_\phi}(\omega)} \in G^p_{(\alpha\circ\phi)\overline{\partial\phi}}(\mathbb{D}).$$

Mêmes résultats pour $\mathbb{G} = \mathbb{D}$ et Ω un domaine conformément équivalent à $\mathbb{A}_{r_0}$ et pour $G^p_\alpha(\mathbb{G})$.

Que se passe-t-il lorsque ϕ n'est plus une transformation conforme ?

Plan

1. Espaces de Hardy généralisés

2. Opérateurs de composition

Opérateurs de composition : continuité -(partie I)

Proposition (S.Elliott, J.Leblond, E. P., E. Russ)

Soit $\phi : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ *analytique telle que* $\phi \in W^{1,\infty}_{\mathbb{G}}(\mathbb{G})$. *Alors,*

$$\begin{array}{rcl} C_\phi : H^p_\nu(\mathbb{G}) & \longrightarrow & H^p_{\nu\circ\phi}(\mathbb{G}) \\ f & \longmapsto & f \circ \phi, \end{array}$$

est continu.

Remarque

La preuve de la continuité utilise l'existence d'un majorant harmonique de $|f|^p$ *pour toute fonction* $f \in H^p_\nu(\mathbb{G})$.

Opérateurs de composition : continuité -(partie II)

Lemme (S.Elliott, J.Leblond, E. P., E. Russ)

Soit $\phi : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ *analytique et* $\phi \in W^{1,\infty}_{\mathbb{G}}(\mathbb{G})$. *Soient* $\widetilde{\nu} = \nu \circ \phi$ *et* $\widetilde{\alpha} = (\alpha \circ \phi)\overline{\partial \phi}$ *et* $\alpha = \frac{-\overline{\partial \nu}}{1-\nu^2}$. *Alors,*

$$\begin{array}{ccc} H^p_\nu(\mathbb{G}) & \xrightarrow{C_\phi} & H^p_{\widetilde{\nu}}(\mathbb{G}) \\ \mathcal{J}\Big\downarrow & & \widetilde{\mathcal{J}}\Big\downarrow \\ G^p_\alpha(\mathbb{G}) & \xrightarrow{\widetilde{C}_\phi} & G^p_{\widetilde{\alpha}}(\mathbb{G}) \end{array}$$

Conséquence

Soit $\phi : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ analytique telle que $\phi \in W^{1,\infty}_{\mathbb{G}}(\mathbb{G})$. Alors,

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{C_\phi} : G^p_\alpha(\mathbb{G}) & \longrightarrow & G^p_{(\alpha\circ\phi)\overline{\partial\phi}}(\mathbb{G}) \\ \omega & \longmapsto & \omega \circ \phi, \end{array}$$

est continu.

Opérateurs de composition : inversibilité

Théorème (S.Elliott, J.Leblond, E. P., E. Russ)

Soit $\phi : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ analytique, $\phi \in W^{1,\infty}_{\mathbb{G}}(\mathbb{G})$. Alors, C_ϕ est inversible si et seulement si ϕ est un automorphisme.

Remarque

On obtient le même résultat pour $\phi : \Omega_1 \to \Omega_2$ analytique, $\phi \in W^{1,\infty}_{\Omega_2}(\Omega_1)$, avec Ω_1 et Ω_2 domaines Dini-smooth.

Idées de la preuve. On se place dans le cas où $\mathbb{G} = \mathbb{D}$. On munit $H^p_\nu(\mathbb{D})$ de la norme

$$\|f\|_{H^p_\nu(\mathbb{D})} = \|\mathrm{tr}\, f\|_{L^p(\mathbb{T})}.$$

Inversibilité : Fonctions d'évaluations

Lemme (S.Elliott, J.Leblond, E. P., E. Russ)

Soit $z \in \mathbb{D}$. Les fonctions d'évaluation

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{E}_z^\nu : H_\nu^p(\mathbb{D}) & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ f & \longmapsto & \mathrm{Re}(f(z)) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \mathcal{F}_z^\nu : H_\nu^p(\mathbb{D}) & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ f & \longmapsto & \mathrm{Im}(f(z)) \end{array}$$

sont continues.

Inversibilité : Fonctions d'évaluations

Lemme (S.Elliott, J.Leblond, E. P., E. Russ)

Soit $z \in \mathbb{D}$. Les fonctions d'évaluation

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{E}_z^\nu : H_\nu^p(\mathbb{D}) & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ f & \longmapsto & \mathrm{Re}(f(z)) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \mathcal{F}_z^\nu : H_\nu^p(\mathbb{D}) & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ f & \longmapsto & \mathrm{Im}(f(z)) \end{array}$$

sont continues.

Lemme (S.Elliott, J.Leblond, E. P., E. Russ)

Soit $z \in \mathbb{D}$. Alors : $C_\phi^*(\mathcal{E}_z^{\nu\circ\phi}) = \mathcal{E}_{\phi(z)}^\nu$ *et* $C_\phi^*(\mathcal{F}_z^{\nu\circ\phi}) = \mathcal{F}_{\phi(z)}^\nu$.

"$\Longrightarrow$" Si $\phi(z_1) = \phi(z_2)$, z_1, $z_2 \in \mathbb{D}$, alors

$$C_\phi^*(\mathcal{E}_{z_1}^{\nu\circ\phi}) = \mathcal{E}_{\phi(z_1)}^\nu = \mathcal{E}_{\phi(z_2)}^\nu = C_\phi^*(\mathcal{E}_{z_2}^{\nu\circ\phi}),$$

de même pour $\mathcal{F}_{\phi(z_1)}^\nu$ et $\mathcal{F}_{\phi(z_2)}^\nu$.

Inversibilité

Lemme (S.Elliott, J.Leblond, E. P., E. Russ)

Si z_1, $z_2 \in \mathbb{D}$, $z_1 \neq z_2$, *alors il existe* $f \in H^p_\nu(\mathbb{D})$ *tel que* $f(z_1) \neq f(z_2)$.

On a alors $z_1 = z_2$.

Inversibilité

Lemme (S.Elliott, J.Leblond, E. P., E. Russ)

Si z_1, $z_2 \in \mathbb{D}$, $z_1 \neq z_2$, alors il existe $f \in H^p_\nu(\mathbb{D})$ tel que $f(z_1) \neq f(z_2)$.

On a alors $z_1 = z_2$.

Si on suppose que ϕ n'est pas surjective : on montre qu'il existe $(z_n)_n \subset \mathbb{D}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|C^*_\phi(\mathcal{E}^{\nu\circ\phi}_{z_n})\|_{(H^p_\nu)'}}{\|\mathcal{E}^{\nu\circ\phi}_{z_n}\|_{(H^p_{\nu\circ\phi})'}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\|\mathcal{E}^{\nu}_{\phi(z_n)})\|_{(H^p_\nu)'}}{\|\mathcal{E}^{\nu\circ\phi}_{z_n}\|_{(H^p_{\nu\circ\phi})'}} = 0.$$

Inversibilité

Lemme (S.Elliott, J.Leblond, E. P., E. Russ)

Si z_1, $z_2 \in \mathbb{D}$, $z_1 \neq z_2$, alors il existe $f \in H^p_\nu(\mathbb{D})$ tel que $f(z_1) \neq f(z_2)$.

On a alors $z_1 = z_2$.

Si on suppose que ϕ n'est pas surjective : on montre qu'il existe $(z_n)_n \subset \mathbb{D}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|C^*_\phi(\mathcal{E}^{\nu\circ\phi}_{z_n})\|_{(H^p_\nu)'}}{\|\mathcal{E}^{\nu\circ\phi}_{z_n}\|_{(H^p_{\nu\circ\phi})'}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\|\mathcal{E}^{\nu}_{\phi(z_n)})\|_{(H^p_\nu)'}}{\|\mathcal{E}^{\nu\circ\phi}_{z_n}\|_{(H^p_{\nu\circ\phi})'}} = 0.$$

- $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\mathcal{E}^{\nu}_{\phi(z_n)}\|_{(H^p_\nu)'} < \infty$,
- On construit une suite $(f_k)_k \subset H^p_\nu(\mathbb{D})$, $f_k \in C(\mathbb{T})$, $\|f_k\|_{H^p_\nu(\mathbb{D})} \leq 1$, telle qu'à partir d'un certain rang,

$$|\mathrm{Re}(f_k(z_n))| \geq k.$$

Merci de votre attention