3.5. Proposition. *Soit G un groupe agissant sur un ensemble X. Soit A un élément de X, g un élément de G, G_A et $G_{g\cdot A}$ les stabilisateurs de A et $g\cdot A$. Alors :*

$$G_{g\cdot A} = gG_Ag^{-1}.$$

En particulier, les stabilisateurs de deux éléments de la même orbite sont des groupes isomorphes.

Démonstration. Soit h un élément de G. On a :

$$\begin{aligned} h\in G_{g\cdot A} &\Leftrightarrow h\cdot(g\cdot A) = g\cdot A \\ &\Leftrightarrow hg\cdot A = g\cdot A \\ &\Leftrightarrow g^{-1}hg\cdot A = A \\ &\Leftrightarrow g^{-1}hg \in G_A \\ &\Leftrightarrow h\in gG_Ag^{-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, on a : $G_{g\cdot A} = gG_Ag^{-1}$ et la conjugaison $G_A\to G_{g\cdot A}$, $h\mapsto ghg^{-1}$ est un isomorphisme. □

Revenons à l'action de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{K})\times\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ lorsque $\mathbb{K}$ est un corps fini. On vient de constater que pour calculer le cardinal de l'orbite des matrices de rang r fixé, on peut choisir n'importe quel élément de l'orbite et calculer le cardinal de son stabilisateur. Il est naturel de choisir un élément « aussi simple que possible », dans notre cas la matrice $\mathrm{I}_{m,n,r}$. Déterminons alors le stabilisateur de la matrice $\mathrm{I}_{m,n,r}$. Les matrices ci-dessous sont découpées en blocs de sorte que le bloc supérieur gauche soit carré de taille $r\times r$. Soit $(P,Q)\in G$. On écrit :

$$P = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}.$$

Pour tester si (P,Q) stabilise $\mathrm{I}_{m,n,r}$, il est astucieux de ne pas calculer l'inverse de Q, ce qui serait difficile :

$$\begin{aligned} P\mathrm{I}_{m,n,r}Q^{-1} = \mathrm{I}_{m,n,r} &\Leftrightarrow P\mathrm{I}_{m,n,r} = \mathrm{I}_{m,n,r}Q \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow A = A' \text{ et } C = 0 \text{ et } B' = 0 \\ &\Leftrightarrow P = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C' & D' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Puisque le déterminant de P (resp. Q) est ici le produit des déterminants des blocs diagonaux, P (resp. Q) est inversible si et seulement si A et D (resp. A et D') le sont. D'autre part, B (resp. C') est quelconque dans $\mathscr{M}_{r,m-r}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $\mathscr{M}_{n-r,r}(\mathbb{K})\big)$.

On saura, voir exercice II-5.3.6, comment décrire le stabilisateur $G_{\mathrm{I}_{m,n,r}}$ comme un produit semi-direct :

$$\big(\mathscr{M}_{r,m-r}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{n-r,r}(\mathbb{K})\big) \rtimes \big(\mathrm{GL}_r(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_{m-r}(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_{n-r}(\mathbb{K})\big),$$

sous-groupe du groupe décrit par :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{GL}_r(\mathbb{K}) & \mathscr{M}_{r,m-r}(\mathbb{K}) \\ 0 & \mathrm{GL}_{m-r}(\mathbb{K}) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathrm{GL}_r(\mathbb{K}) & 0 \\ \mathscr{M}_{n-r,r}(\mathbb{K}) & \mathrm{GL}_{n-r}(\mathbb{K}) \end{pmatrix}.$$

3.6. Exercice

Soit d un entier naturel et $\mathbb{K}$ corps fini de cardinal q. Nous allons montrer que l'étude ci-dessus permet de calculer les cardinaux des orbites à partir du cardinal du groupe. Pour tout entier positif n, on pose

$$[n]_q! = \prod_{k=1}^{n} (1 + q + \cdots + q^{k-1}).$$

1. *Montrer la relation :*

$$|\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})| = q^{nm}, \ |\operatorname{GL}_d(\mathbb{K})| = \prod_{i=0}^{d-1} (q^d - q^i) = q^{\frac{d(d-1)}{2}} (q-1)^d [d]_q! \,.$$

   On pourra se référer à la preuve de [6, Proposition VIII-1.1].

2. *Montrer que le nombre de matrices de taille $m\times n$ de rang r sur $\mathbb{K}$ est*

$$|\operatorname{GL}_r(\mathbb{K})| \times \frac{[m]_q!}{[r]_q![m-r]_q!} \times \frac{[n]_q!}{[r]_q![n-r]_q!}\,.$$

   On remarquera en passant la symétrie en m et n de la formule, justifiée par le fait que la transposition conserve le rang.

   On calcule $|\big(\mathrm{GL}_m(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})\big) \cdot \mathrm{I}_{m,n,r}|$, et l'on quotiente pour cela le cardinal de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ par celui du stabilisateur de $\mathrm{I}_{m,n,r}$. Le cardinal du groupe $\mathrm{GL}_m(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est $|\mathrm{GL}_m(\mathbb{K})| \times |\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})|$ et le cardinal du stabilisateur est

$$|\mathrm{GL}_r(\mathbb{K})| \times |\mathscr{M}_{r,m-r}(\mathbb{K})| \times |\mathrm{GL}_{m-r}(\mathbb{K})| \times |\mathrm{GL}_r(\mathbb{K})| \times |\mathscr{M}_{n-r,r}(\mathbb{K})| \times |\mathrm{GL}_{n-r}(\mathbb{K})|.$$

   On conclut aisément avec les résultats obtenus. ◇