

Feuille 18
Compacité

Dans toute la feuille, on considère un espace métrique compact (K, d) . On note $C(K)$ l'espace des fonctions continues de K dans $\mathbf{R}$, qui est un espace de Banach pour la norme $\|f\| = \sup_K |f|$.

Exercice 1. Théorème de Dini (1)

Soit (f_n) une suite croissante d'éléments de $C(K)$. On suppose que (f_n) converge simplement vers une fonction continue f . Montrer que la convergence est uniforme.

Exercice 2. Théorème de Dini (2)

Soit (f_n) une suite de fonctions de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$ qui converge simplement vers une fonction continue f . On suppose que pour chaque n , f_n est croissante. Montrer que la convergence est uniforme.

Exercice 3. Équicontinuité

Soit $\mathcal{F} \subset C(K)$. Montrer l'équivalence entre

(a) $\mathcal{F}$ est équicontinu :

$$\forall x \in K, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall f \in \mathcal{F}, \forall y \in K, d(x, y) < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

(b) $\mathcal{F}$ est uniformément équicontinu :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall f \in \mathcal{F}, \forall x \in K, \forall y \in K, d(x, y) < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Exercice 4. Théorème d'Ascoli

Soit (K, d) un espace métrique compact.

1. Montrer que K est séparable.
2. Soit (x_k) une suite dense de K , et (f_n) une suite dans $C(K)$ vérifiant $\sup_n \|f_n\|_\infty < +\infty$. Montrer qu'il existe une sous-suite $(f_{\sigma(n)})$ telle que pour tout k , $(f_{\sigma(n)}(x_k))_n$ converge.
3. On suppose de plus que la suite (f_n) est équicontinue. Dédurre alors que la suite $(f_{\sigma(n)})$ converge uniformément sur K .
4. Réciproquement, soit (f_n) une suite convergente dans $C(K)$. Montrer que (f_n) est équicontinue.

Exercice 5. Espaces de fonctions hölderiennes

Soit $\alpha > 0$. Pour une fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, on pose

$$H_\alpha(f) = \sup_{0 \leq x \neq y \leq 1} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

On dit que f est α -hölderienne si $H_\alpha(f) < \infty$.

1. Montrer que si $\alpha > 1$, toute fonction α -hölderienne de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$ est constante. Dans la suite on supposera $0 < \alpha < 1$.
2. On note $C^\alpha([0, 1])$ l'espace des fonctions α -hölderiennes de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$. Montrer que $C^\alpha([0, 1])$ est un espace de Banach quand il est muni de la norme $\|f\|_\alpha := H_\alpha(f) + \|f\|_\infty$.
3. Montrer que la boule-unité de $C^\alpha([0, 1])$ est relativement compacte dans $C([0, 1])$.
4. Soit $0 < \alpha < \beta < 1$.

(a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a l'inégalité

$$H_\alpha(f) \leq \max(H_\beta(f)\varepsilon^{\beta-\alpha}, 2\|f\|_\infty\varepsilon^{-\alpha}).$$

(b) En déduire que la boule-unité de $C^\beta([0, 1])$ est relativement compacte dans $C^\alpha([0, 1])$.

Exercice 6. Distance de Hausdorff

Soit (X, d) un espace métrique. Pour $A \subset X$ et $\varepsilon > 0$, on note

$$A_\varepsilon = \bigcup_{x \in A} B(x, \varepsilon).$$

On note $K(X)$ l'ensemble des compacts non vides de X .

1. Montrer que l'on définit une distance δ sur $K(X)$ en posant

$$\delta(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset B_\varepsilon \text{ et } B \subset A_\varepsilon\}.$$

2. Supposons X compact.

(a) Pour $A \in K(X)$, on définit une fonction $d_A : X \rightarrow \mathbf{R}$ par la formule $d_A(x) = \inf_{y \in A} d(x, y)$. Montrer que l'application $A \mapsto d_A$ est une isométrie de $(K(X), \delta)$ dans $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$.

(b) Montrer que $\{d_A : A \in K(X)\} \subset C(X)$ est compact et en déduire que $(K(X), \delta)$ est compact.

3. Montrer que si (X, d) est complet, alors $(K(X), \delta)$ est complet.

Exercice 7. Dimension métrique

Soit (K, d) un espace métrique compact. Pour $\varepsilon > 0$, on note $N(K, \varepsilon)$ le nombre minimal de boules ouvertes de rayon ε qu'il faut pour recouvrir K . On appelle *dimension métrique* de K la quantité

$$\dim_m(K) := \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}.$$

1. Quelle est la dimension métrique d'un segment de $\mathbf{R}$?
2. Soit K la boule-unité d'un espace vectoriel normé de dimension n , et $0 < \varepsilon < 1$. Montrer que $N(K, \varepsilon) \geq (1/\varepsilon)^n$, puis que $N(K, \varepsilon) \leq (1+2/\varepsilon)^n$ (**Indication** : montrer que pour un recouvrement minimal par des boules de rayon ε , les boules de même centre et de rayon $\varepsilon/2$ sont disjointes). En déduire la dimension métrique de K .
3. Soit p un nombre premier. On définit pour $x, y \in \mathbf{Z}$

$$\begin{cases} d_p(x, y) = 0 & \text{si } x = y \\ d_p(x, y) = \exp(-n) \text{ où } n \text{ est le plus grand entier tel que } p^n \text{ divise } x - y & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

Montrer que d_p est une distance sur $\mathbf{Z}$ et que la dimension métrique de $(\mathbf{Z}, d_p)$ vaut $\log p$. Le complété de $(\mathbf{Z}, d_p)$ s'appelle l'ensemble des nombres p -adiques.

Exercice 8. Théorème de Carathéodory

1. Soient $x_1, \dots, x_p$ dans $\mathbf{R}^n$ avec $p > n + 1$. Montrer qu'il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ non tous nuls vérifiant à la fois $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 0$ et $\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i = 0$ (on dit que les points $x_1, \dots, x_p$ sont affinement liés).
2. Soit $A \subset \mathbf{R}^n$ et $\text{conv}(A)$ l'enveloppe convexe de A , c'est à dire l'intersection de tous les convexes contenant A . Montrer que tout élément de $\text{conv}(A)$ s'écrit comme combinaison convexe d'au plus $n + 1$ éléments de A .
3. Soit $A \subset \mathbf{R}^n$ compact. Montrer que $\text{conv}(A)$ est compact.