Théorème: On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Le développement asymptotique de H_n est donné par :

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$ où γ cste d'Euler.

Preuve :

① Soit $u_n = H_n - \ln n$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$, $n \geq 1$.

Montrons que $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes:

* $u_n - v_n = \frac{1}{n}$ qui est positif et $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
* $u_{n+1} - u_n = H_{n+1} - H_n - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$.

Or $\forall x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{-1}{n+1} > -1$, donc $u_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} \leq 0$.

donc $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

* $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - \frac{1}{n+1} - u_n + \frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

or $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$, donc $v_{n+1} - v_n \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \geq 0$.

donc $(v_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

Les deux suites sont donc adjacentes. Donc elles convergent vers un réel γ.

De plus, $v_2 = 1 - \ln 2 > 0$. Donc $\gamma > 0$.

Finalement, $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.

② On cherche donc un équivalent à $t_n = u_n - \gamma$, $n \geq 1$. Pour cela, on cherche un équivalent de $t_n - t_{n-1}$.

Quand $n \to +\infty$, on a : $t_n - t_{n-1} = u_n - \gamma - u_{n-1} + \gamma = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \cancel{\frac{1}{n}} - \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{2n^2} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Donc $t_n - t_{n-1} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$. D'où $\sum (t_k - t_{k-1})$ converge.

Le théorème de sommation des équivalents nous donne:

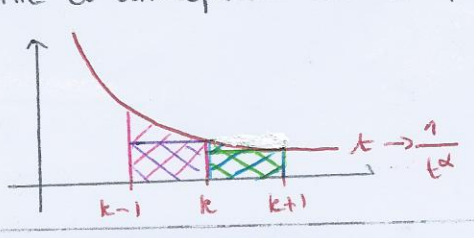
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} (t_k - t_{k-1}) = -t_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

On cherche donc un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Si $\alpha > 1$, la fonction $t \longmapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante et intégrable sur $[1 ; +\infty[$.

On a donc pour $k \geq 2$:

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha}$$



donc en sommant entre $n+1$ et N : $\sum_{k=n+1}^{N} \int_{k}^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha}$

puis en faisant tendre $N \to +\infty$: $\int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} \leq \int_{k}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$

les deux termes d'encadrement sont équivalents à $\frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ en $+\infty$,

d'où $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$.

On a donc pour $\alpha = 2$: $t_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$.

Finalement, $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

③ on utilise la même méthode pour trouver un équivalent de $w_n = u_n - \gamma - \frac{1}{2n}$, $n \geq 1$.

$(w_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0.

On a $\sum_{k=n+1}^{+\infty} (w_k - w_{k-1}) = -w_n$.

Et $w_n - w_{n-1} = u_n - \cancel{\gamma} - \frac{1}{2n} - u_{n-1} + \cancel{\gamma} + \frac{1}{2n-2} = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-2}$

Pour $n \to +\infty$ on a :

$w_n - w_{n-1} = \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-2} + \left(-\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = -\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-2} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

or $\frac{1}{2n-2} = \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{1-1/n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$

donc $w_n - w_{n-1} = \cancel{-\frac{1}{2n}} + \frac{1}{2n}\left(\cancel{1} + \cancel{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n^2}\right) - \cancel{\frac{1}{2n^2}} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

$= \frac{1}{2n^3} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

$= \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

donc $w_n - w_{n-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{6n^3}$

En réutilisant le théorème de sommation comme ci-dessus, on obtient

$-w_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (w_k - w_{k-1}) \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{6k^3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2} \frac{1}{6n^2}$

Ainsi on obtient le développement asymptotique

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$