Université Claude Bernard — Mathématiques

Agrégation — préparation à l'écrit d'analyse.

Feuille 1

Intégration des fonctions d'une variable réelle.

Exercice 1. Du calcul. Calculer, pour $\alpha > 0$, la valeur de

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} \cos(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 2. Convergence d'intégrales impropres. Étudier la convergence des intégrales impropres suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}\,\mathrm{d}t$,
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cosh(t)-\cos(t)}{t^{5/2}}\,\mathrm{d}t$,
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$,
4. $\displaystyle\int_0^\infty t\cos(t^3)\,\mathrm{d}t$,
5. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$,
6. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+t^4\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3. Mais que fait cet exercice dans une feuille sur l'intégration ? Montrer que la suite (u_n) définie par

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2}$$

converge et calculer sa limite ℓ.

Exercice 4. Normes $\|\cdot\|_p$ quand $p \to \infty$. Soient $a < b$ deux réels et $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue. On définit, pout un réel $p \geqslant 1$,

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

Calculer

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_p.$$

Exercice 5. Intégrales de Wallis. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n\,\mathrm{d}x.$$

1. Donner une expression explicite de I_n pour tout $n \in \mathbf{N}$. **Indication :** *Intégrer par parties pour obtenir une relation de récurrence.*
2. En déduire la formule de Wallis

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p}\left[\frac{2p(2p-2)\cdots 2}{(2p-1)(2p-3)\cdots 1}\right]^2 = \pi.$$

   Indication : *Montrer que* I_{n+1}/I_n *tend vers* 1.
3. Montrer que lorsque n tend vers l'infini, $I_n \sim \sqrt{\pi/2n}$.
4. On peut alors retrouver la valeur de l'intégrale gaussienne : montrer tout d'abord que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et $t \in [0, \sqrt{n}]$, on a

$$\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \leqslant \exp(-t^2) \leqslant \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n},$$

   puis en déduire la valeur de

$$I = \int_0^\infty \exp(-t^2)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 6. Vrai ou faux ? Soit $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ une fonction intégrable (i.e. telle que l'intégrale $\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t$ converge).

1. Est-il vrai que f tend vers 0 en $+\infty$?
2. Et si on suppose f décroissante ?
3. Et si on suppose f continue ?
4. Et si on suppose f uniformément continue ?

Exercice 7. La méthode de Laplace. Soieent $a < b$ deux réels, $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^2. On suppose que f atteint son maximum sur $[a, b]$ en unique point c, qui vérifie de plus $c \in]a, b[$ et $f''(c) < 0$. Pour $t > 0$, on considère

$$\phi(t) = \int_a^b \exp(tf(x))\,\mathrm{d}x.$$

Le but de l'exercice est de montrer que lorsque t tend vers l'infini, $\phi(t)$ est équivalent à

$$\psi(t) := \exp(tf(c))\sqrt{\frac{2\pi}{t|f''(c)|}}.$$

1. Montrer que pour tous réels $A > 0$ et $\delta > 0$, on a l'équivalent suivant, lorsque t tend vers $+\infty$
$$\int_{-\delta}^{\delta} \exp(-tAx^2)\,\mathrm{d}x \sim \sqrt{\frac{\pi}{tA}}$$
2. Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in [c - \delta, c + \delta]$,
$$f(c) + (1+\varepsilon)f''(c)\frac{(x-c)^2}{2} \leqslant f(x) \leqslant f(c) + (1-\varepsilon)f''(c)\frac{(x-c)^2}{2}.$$
En déduire l'existence de $T_1 > 0$ tel que, pour tout $t > T_1$,
$$\frac{(1-\varepsilon)\psi(t)}{\sqrt{1+\varepsilon}} \leqslant \int_{c-\delta}^{c+\delta} \exp(tf(x))\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{(1+\varepsilon)\psi(t)}{\sqrt{1-\varepsilon}}.$$
3. Le nombre δ étant fixé par la question précédente, démontrer l'existence de T_2 tel que pour tout $t > T_2$,
$$\int_a^{c-\delta} \exp(tf(x))\,\mathrm{d}x + \int_{c+\delta}^b \exp(tf(x))\,\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon\psi(t).$$
4. Conclure que $\phi(t) \sim \psi(t)$ lorsque t tend vers l'infini.

Une application classique est de retrouver la formule de Stirling. On rappelle que la fonction Γ est définie pour $x > -1$ par

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

et que, si $n \in \mathbf{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$. Montrer que lorsque t tend vers $+\infty$, on a

$$\Gamma(t+1) \sim (t/e)^t\sqrt{2\pi t}.$$

Indication : *Faire un changement de variables pour que le maximum de la fonction intégrée soit atteint en* 1.

Une référence parmi beaucoup : X. Gourdon, *Les maths en tête (analyse).* Attention, ce livre comme plusieurs autres, se place uniquement dans le contexte de l'intégrale de Riemann. Dans certains cas le recours aux théorèmes de la théorie de Lebesgue (notamment au théorème de convergence dominée) permet de simplifier les preuves.