Feuille 2
Théorie de la mesure et intégration.

On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$, définie sur la tribu des boréliens.

Exercice 1. Deviner les limites suivantes, puis justifier vos conjectures.

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{x/2}\,\mathrm{d}x \text{ et } \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert $O \subset \mathbf{R}$ dense et vérifiant $\lambda(O) \leqslant \varepsilon$.

Exercice 3. Soit (A_n) une suite de boréliens de $[0,1]$ vérifiant $\lambda(A_n) \geqslant 1/2$. Montrer que l'ensemble

$$B = \{x \in [0,1] :\ \text{l'ensemble } \{n \in \mathbf{N} : x \in A_n\} \text{ est infini }\}$$

est un borélien et vérifie $\lambda(B) \geqslant 1/2$.

Exercice 4. Soit $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, et $f : X \to \mathbf{R}$ une fonction intégrable. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $A \in \mathcal{F}$,

$$\mu(A) \leqslant \delta \Longrightarrow \int_A |f|\,\mathrm{d}\mu \leqslant \varepsilon.$$

Exercice 5. Démontrer le résultat suivant : si $f : [0,1] \to \mathbf{R}^+$ est une fonction intégrable, alors $\int_{[0,1]} f\,\mathrm{d}\lambda$ est l'aire comprise entre l'axe des absisses et le graphe de f.

Exercice 6. En utilisant le théorème de Fubini et l'égalité (pour $x > 0$)

$$\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-xt}\,\mathrm{d}t,$$

montrer que

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 7. Variation totale

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On appelle *densité* une fonction borélienne de $[0,1]^n$ dans $\mathbf{R}^+$ dont l'intégrale vaut 1. Si q et r sont deux densités, on pose

$$d_{VT}(q,r) = \sup_{0\leqslant f\leqslant 1} \left| \int_{[0,1]^n} f(x)q(x)\,\mathrm{d}x - \int_{[0,1]^n} f(x)r(x)\,\mathrm{d}x \right|,$$

où le supremum est pris sur toutes les fonctions boréliennes f à valeurs dans $[0,1]$. Montrer que

$$d_{VT}(q,r) = \frac{1}{2}\int_{[0,1]^n} |q(x) - r(x)|\,\mathrm{d}x.$$