Feuille 22
Analyse complexe (2).

Exercice 1.

Soit une fonction holomorphe sur le disque-unité ouvert, continue sur le disque-unité fermé, et nulle sur un arc du cercle-unité. Peut-on conclure que la fonction est nulle ?

Exercice 2. Le lemme des trois droites

On note $\Omega = \{z \in \mathbf{C} : 0 < \Re z < 1\}$. Soit f une fonction continue sur $\overline{\Omega}$ et holomorphe sur Ω. On suppose que f est bornée et on se donne des réels strictement positifs M_0 et M_1 tels que pour tout $y \in \mathbf{R}$, on ait $|f(iy)| \leqslant M_0$ et $|f(1+iy)| \leqslant M_1$. Le but de l'exercice est de montrer que si $z \in \Omega$, on a

$$|f(z)| \leqslant M_0^{1-\Re z} M_1^{\Re z}.$$

1. A l'aide du principe du maximum, montrer le résultat sous les hypothèses supplémentaires

$$M_0 = M_1 = 1, \tag{1}$$

$$\lim_{y\to\pm\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f(x+iy)| = 0. \tag{2}$$

2. Montrer le résultat en supposant uniquement (1).
   Indication : *considérer* $z \mapsto f(z)e^{(z^2-1)/n}$ *pour* $n \in \mathbf{N}^*$.
3. Montrer le résultat dans le cas général.
   Indication : *considérer* $z \mapsto f(z)M_0^{z-1}M_1^{-z}$
4. Peut-on se passer de l'hypothèse "f bornée" ?

Exercice 3. Un calcul d'intégrale par la méthode des résidus

On souhaite calculer l'intégrale suivante, où $a > 1$,

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a + \sin(t)}.$$

1. Soit $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbf{C}$ le lacet défini par $\gamma(t) = e^{it}$. Montrer que

$$I = \int_\gamma \frac{2}{z^2 + 2iaz - 1}\,\mathrm{d}z.$$

2. Montrer que l'équation $z^2 + 2iaz - 1 = 0$ admet deux solutions complexes, dont une seule est de module inférieur à 1.
3. À l'aide du théorème des résidus, montrer que

$$I = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Exercice 4. Loi de Cauchy

On appelle loi de Cauchy la mesure de probabilité dont la densité est la fonction $x \mapsto \frac{1}{\pi(1+x^2)}$.

1. À l'aide du théorème des résidus, calculer la fonction caractéristique d'une variable aléatoire de loi de Cauchy.
2. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi de Cauchy. Que peut on dire de la suite

$$\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) \text{ ?}$$

Exercice 5. Extrait de la partie III du sujet 2015

Soit Ω un ouvert de $\mathbf{C}$, on note $\mathcal{O}(\Omega)$ le $\mathbf{C}$-espace vectoriel des fonctions holomorphes sur Ω à valeurs dans $\mathbf{C}$. On munit $\mathcal{O}(\Omega)$ de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de Ω.

1. Soit log la détermination holomorphe du logarithme sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^-$ définie par $\log(1) = 0$ et $\sqrt{\ }$ la fonction racine carrée de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}_+^*$. On note

$$\Phi : z \mapsto z \exp\left(\frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{2}{z^2}\right)\right).$$

   (a) Démontrer que la fonction Φ est holomorphe sur $\mathbf{C} \setminus [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ et que

$$\forall x \in \mathbf{R} \setminus [-\sqrt{2}, \sqrt{2}],\ \Phi(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 2} & \text{si } x > \sqrt{2} \\ -\sqrt{x^2 - 2} & \text{si } x < -\sqrt{2}. \end{cases}$$

   (b) Soit $C(O, R)$ le cercle de centre O et de rayon R. Montrer que :

$$\forall z \in \mathbf{C},\ \lim_{R \to +\infty} \int_{C(O,R)} \frac{\Phi(w) - w}{w - z}\, \mathrm{d}w = 0.$$

2. On note G la fonction de $\mathcal{O}(\mathbf{C} \setminus [-\sqrt{2}, \sqrt{2}])$ donnée par

$$\forall z \in \mathbf{C} \setminus [-\sqrt{2}, \sqrt{2}],\ G(z) = z - \Phi(z).$$

   Prouver que :

$$\forall z \in \mathbf{C} \setminus [-\sqrt{2}, \sqrt{2}], \int_{[-\sqrt{2},\sqrt{2}]} \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{2 - t^2}}{z - t}\, \mathrm{d}t = G(z).$$

   Indication : *On pourra appliquer le théorème des résidus à l'intégrale curviligne* $\int_{\Gamma_{R,\varepsilon}} \frac{\Phi(w)}{w-z}\, \mathrm{d}w$ *où* $\Gamma_{R,\varepsilon}$ *est le contour obtenu en réunissant le cercle* $C(O, R)$ *avec le rectangle dont les sommets sont* $\pm(\sqrt{2} + \varepsilon + i\varepsilon)$, $\pm(\sqrt{2} + \varepsilon - i\varepsilon)$.