Feuille 23

Théorèmes de point fixe

Exercice 1. Théorèmes basés sur l'ordre dans R

Soit $I = [a, b]$ un segment de $\mathbf{R}$.

1. Soit $f : I \to I$ continue. Montrer que f admet un point fixe.
2. Soit $f : I \to \mathbf{R}$ continue telle que $I \subset f(I)$. Montrer que f admet un point fixe.
3. Soit $f : I \to I$ croissante. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 2. Théorème du point fixe de Banach (dans un espace complet)

Soit (E, d) un espace métrique complet non vide. Soit $\lambda \in [0, 1[$ et $f : E \to E$ une application vérifiant $d(f(x), f(y)) \leqslant \lambda d(x, y)$ pour tous $x, y \in E$. Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 3. Dans un espace compact

Soit (E, d) un espace métrique compact non vide et $f : E \to E$ telle que $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ pour tous $x, y \in E$ avec $x \neq y$. Montrer que f admet un unique point fixe.

En considérant $E = [1, \infty[$ et $f : x \mapsto x + 1/x$, montrer que la conclusion n'est plus satisfaite si on suppose seulement (E, d) complet.

Exercice 4. Dans un convexe compact

Soit K un convexe compact non vide d'un espace vectoriel normé, et $f : K \to K$ une fonction vérifiant $\|f(x) - f(y)\| \leqslant \|x - y\|$ pour tous $x, y \in K$. Montrer que f admet un point fixe. Est-il unique ?

Indication. *Pour $a \in K$ et $\varepsilon \in]0, 1[$, considérer $x \mapsto \varepsilon a + (1 - \varepsilon)f(x)$.*

Remarque. Le *théorème de Brouwer* affirme que si B est (homéomorphe à) la boule-unité de $\mathbf{R}^n$, toute fonction continue $f : B \to B$ admet un point fixe ; ce résultat est considérablement plus difficile à démontrer.

Exercice 5. Perturbation de l'identité

Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ une fonction k-Lipschitzienne avec $k < 1$. On va montrer que $g = \mathrm{Id} - f$ est bijective d'inverse continue.

1. Montrer que g est injective.
2. En utilisant un théorème de point fixe, montrer que g est surjective.
3. Motnrer que g^{-1} est continue.

Exercice 6. Théorème de « point fixe » de Kakutani

Soit K un convexe compact non vide de $\mathbf{R}^n$. On appelle correspondance de K dans K une fonction de K dans l'ensemble des parties non vides de K. On dit qu'une correspondance γ est fermée si l'ensemble $\mathrm{Gr}(\gamma) = \{(x, y) : x \in K, y \in \gamma(x)\}$ est fermé, et on dit que γ est convexe si pour tout $x \in K$, l'ensemble $\gamma(x)$ est convexe.

Le théorème de Kakutani, fondamental en économie et en théorie des jeux pour démontrer l'existence d'équilibres, s'énonce ainsi : pour tout correspondance fermée convexe de K dans K, il existe $x \in K$ tel que $x \in \gamma(x)$.

1. Démontrer le théorème de Kakutani en dimension 1.
2. Donner des contre-exemples montrant que le résultat est faux sans l'hypothèse « fermé », puis sans l'hypothèse « convexe ».
3. On va maintenant montrer que le théorème de Kakutani en dimension n est équivalent au théorème de Brouwer.
   (a) Montrer que le théorème de Kakutani implique le théorème de Brouwer.

(b) Montrer le lemme suivant (de partition de l'unité) : si $U_1, \dots, U_k$ sont des ouverts recouvrant K, alors il existe des fonction continues $f_1, \dots, f_k : K \to [0,1]$ vérifiant $f_1 + \cdots + f_n = 1$ et $f_i(x) = 0$ pour $x \in K \setminus U_i$.

(c) On se donne une correspondance fermée convexe γ, et U un ouvert de $K \times K$ contenant $\mathrm{Gr}(\gamma)$. Pour $\varepsilon > 0$, on définit une nouvelle correspondance γ^ε par la formule

$$\gamma^\varepsilon(x) = \mathrm{conv}\left(\bigcup_{|y-x|<\varepsilon} \gamma(y) \right).$$

Montrer que $\mathrm{Gr}(\gamma^\varepsilon) \subset U$ pour ε assez petit (raisonner par l'absurde).

(d) Montrer que U contient le graphe d'une fonction continue.

(e) Démontrer le théorème de Kakutani comme conséquence du théorème de Brouwer.

Exercice 7. Théorème de Markov–Kakutani (sans lien avec le précédent !)

Soit E un espace vectoriel normé et $K \subset E$ un compact convexe non vide.

1. Soit $f : E \to E$ une application affine continue telle que $f(K) \subset K$. Soit $a \in K$. On pose $a_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f^k(a)$.

(a) Montrer que $a_n \in K$ et que $\|f(a_n) - a_n\|$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

(b) En déduire que f admet au moins un point fixe dans K.

(c) Montrer que l'ensemble des points fixes de f dans K est un compact convexe non vide.

2. Supposons maintenant que K est stable par une famille $(f_i)_{i \in I}$ d'applicaions affines continues qui commutent deux à deux.

(a) Supposons I fini. Montrer qu'il existe un point de K qui est fixe pour tous les f_i.

(b) Montrer que la propriété reste vraie pour I infini.