Université Claude Bernard — Mathématiques

Agrégation — préparation à l'écrit d'analyse.

Feuille 24

Compléments de calcul différentiel

Si Ω est un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbf{R}^p$, on note Df_x la différentielle de f en x (si elle existe).

Exercice 1. Caractérisation des fonctions C^1

Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et F un espace normé. Montrer qu'une application $f : U \to F$ est de classe C^1 sur U si et seulement si elle admet des dérivées partielles $\partial_i f$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ qui sont continues sur U.

Exercice 2. Extrema

Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par $f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$. Déterminer les extrema locaux de la fonction f, en précisant s'il s'agit d'extrema globaux.

Exercice 3. C^∞ + contrôle sur les dérivées $\Longrightarrow$ analytique

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^∞. On suppose que f et toutes ses dérivées sont bornées, avec $\|f^{(n)}\|_\infty \leqslant 5^n$ pour tout n. Montrer que f est développable en série entière en tout point.

Exercice 4. Fonctions homogènes

1. Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une fonction différentiable, et soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes
   (a) $\forall x \in \mathbf{R}^n$, $\forall t > 0$, $f(tx) = t^\lambda f(x)$,
   (b) $\forall x \in \mathbf{R}^n$, $Df_x(x) = \lambda f(x)$.
   Si ces propriétés sont vérifiées, on dit que f est λ-homogène.
2. Soit $k \in \mathbf{N}$. Montrer que si $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ est de classe $\mathbf{C}^k$ et k-homogène, alors f est un polynôme homogène de degré k.
3. Déterminer toutes les fonctions différentiables $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ vérifiant
$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = (x^4 + y^4)^{1/2}.$$

Exercice 5. Théorème de Rolle dans $\mathbf{R}^n$

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$ et $f : \overline{\Omega} \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur $\overline{\Omega}$ et différentiable dans Ω. On suppose que f est constante sur $\partial\Omega$. Montrer qu'il existe $x_0 \in \Omega$ vérifiant $Df_{x_0} = 0$.

Exercice 6. Extrema liés

1. Trouver les dimensions de la boîte en carton parallélépipédique sans couvercle de volume 1 litre qui minimise la consommation en carton.
2. Montrer que si a, b, c sont des nombres positifs, alors $abc^3 \leqslant 27\left(\frac{a+b+c}{5}\right)^5$.

Exercice 7. Différentiabilité des fonctions convexes

Dans tout l'exercice, $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ est une fonction convexe.

1. On note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$, et $\|\cdot\|_1$ la norme sur $\mathbf{R}^n$ définie par $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$. Montrer que si $a \in \mathbf{R}^n$ et $u \in \mathbf{R}^n$ vérifie $\|u\|_1 = 1$, alors
$$\forall t \in [0,1], |f(a+tu) - f(a)| \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |f(a \pm te_i) - f(a)|.$$
2. Montrer que si f admet des dérivées partielles en un point $a \in \mathbf{R}^n$, alors f est différentiable en a. On pourra se ramener au cas où $\partial_i f(a) = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et utiliser la question 1.
3. Soit A un borélien de $\mathbf{R}^n$. On suppose que pour tout $b \in \mathbf{R}^{n-1}$, l'ensemble
$$A_b = \{s \in \mathbf{R} : (s,b) \in A\}$$
   est de mesure nulle dans $\mathbf{R}$. Montrer que A est de mesure nulle dans $\mathbf{R}^n$.
4. Montrer que f est différentiable en presque tout point $a \in \mathbf{R}^n$.