EXERCICE 4
FEUILLE 4

1) Soit $\Psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{si } |x|<1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- On a bien Ψ continue. En effet, $\Psi \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} \Psi(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} \Psi(x) = 0$

- Posons $\varphi(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

on a $\Psi(x) = \varphi(1-x^2)$ où $x \longmapsto 1-x^2$ est C^∞.
La question est donc : $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$? Le problème est en 0. On sait déjà que $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^*)$.

TH Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que
f continue sur $[a,b]$, f dérivable sur $]a,b]$
et $f'(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$
Alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$

On remarque que $\forall x>0 \quad \varphi'(x) = \frac{1}{x^2}\varphi(x)$

$\varphi''(x) = \left(-\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right)\varphi(x)$ ... donc $\exists P_n \in \mathbb{R}[X]$
tel que $\forall x>0 \quad \varphi^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x}$

Par croissances comparées, $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \varphi^{(n)}(x) \xrightarrow{x\to 0^+} 0$
Donc par le théorème ci-dessus, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$.
D'où $\Psi \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Rqe : Ψ n'est pas développable en série entière en 1 sinon ce serait la fonction nulle

Pour la suite régularisante, on pose

$$\rho_n(x) = \frac{\Psi(nx)}{\int \Psi(nx)\,dx}$$

Ainsi $(\rho_n)_n \subset C^\infty$, $\rho_n(x) = 0$ si $|x| \geq \frac{1}{n}$ et $\int \rho_n(x)\,dx = 1$.

Donc $(\rho_n)_n$ est bien une suite régularisante.

2) Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Mq $\rho_n * f \xrightarrow{cu} f$ sur tout compact.

Soit K compact de $\mathbb{R}^d$. Soit $x \in K$. On a

$$\rho_n * f(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \rho_n(y) f(x-y)\,dy - f(x)$$

$$\int \rho_n = 1 \longleftarrow = \int_{\mathbb{R}^d} \rho_n(y) f(x-y)\,dy - \int_{\mathbb{R}^d} \rho_n(y) f(x)\,dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \rho_n(y)\,(f(x-y) - f(x))\,dy$$

d'où $|\rho_n * f(x) - f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} \rho_n(y)\,|f(x-y) - f(x)|\,dy$

Comme f est continue sur un compact, f est uniformément continue (sur le compact).

Donc $\exists \eta > 0 \quad \forall a, b \in K \quad |a-b| < \eta \Rightarrow |f(a) - f(b)| < 1$

d'où

$$|\rho_n * f(x) - f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} \rho(ny)\,|f(x-y) - f(x)|\,dy$$

$$z = ny \longleftarrow = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}^d} \rho(z)\,|f(x - \tfrac{z}{n}) - f(x)|\,dz$$

or $\frac{z}{n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$ donc $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |\frac{z}{n}| < \eta$

d'où $\forall n \geq N \quad |\rho_n * f(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}^d} \rho(z)\,\varepsilon\,dz$

$$= \frac{\varepsilon}{n}$$

Ainsi $\sup_{x \in K} |\rho_n * f(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{n}$

d'où $\|\rho_n * f - f\|_{\infty, K} \xrightarrow{n \to \infty} 0$

3) Soit $f \in L^p$. Comme $\overline{C_c^\infty}^{L^p} = L^p$, $\exists (f_m)_m \subset C_c^\infty$ tq $f_m \xrightarrow{L^p} f$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|\rho_n * f - f\|_p = \|\rho_n * (f - f_m) + \rho_n * f_m - f_m + f_m - f\|_p$$

$$\leq \|\rho_n * (f - f_m)\|_p + \|\rho_n * f_m - f_m\|_\infty + \|f_m - f\|_p$$

$$\leq \underbrace{\|\rho_n\|_\infty}_{< \infty \text{ car } \rho_n \in C_c^\infty} \underbrace{\|f - f_m\|_p}_{\downarrow m \to \infty,\ 0} + \underbrace{\|\rho_n * f_m - f_m\|_\infty}_{\downarrow n \to \infty,\ 0 \text{ car } f_m \in C_c^\infty} + \underbrace{\|f_m - f\|_p}_{\downarrow m \to \infty,\ 0}$$

donc $\operatorname{supp}(\rho_n * f_m - f_m) \subset$ compact $\tilde{K}$

donc $\|\rho_n * f_m - f_m\|_\infty = \|\rho_n * f_m - f_m\|_{\infty, \tilde{K}} \longrightarrow 0$ par (2)

Ainsi $\|\rho_n * f - f\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0$

4) Soient $f \in L^1$, $g \in C^1_c$. Mq $f*g \in C^1$

* Mq $f*g \in C^0$

On a : • $y \longmapsto f(y)g(x-y)$ est mesurable (car $f \in L^1$, $g \in C^1$) pour tout $x \in \mathbb{R}^d$

• $x \longmapsto f(y)g(x-y)$ est continue car $g \in C^0$ pour p.p y

• $|f(y)g(x-y)| \leq \|g(x-\cdot)\|_\infty |f(y)| \in L^1$

$g \in C^0_c$

d'où par le théorème de continuité sous l'intégrale, $f*g$ C^0

* Mq $f*g \in C^1$

On a : • $y \longmapsto f(y)g(x-y)$ mesurable (car $f \in L^1$, $g \in C^1$) pour tout $x \in \mathbb{R}^d$

• $\forall i \leq d$ $x_i \longmapsto f(y)g(x-y)$ est C^1 de dérivée $f(y)\frac{\partial g}{\partial x_i}(x-y)$ pour p.p y

• $|f(y)\frac{\partial g}{\partial x_i}(x-y)| \leq \|\frac{\partial g}{\partial x_i}(x-\cdot)\|_\infty |f(y)| \in L^1$

$g \in C^1_c$

d'où par le théorème de dérivabilité sous l'intégrale, $f*g$ est C^1, et

$$\frac{\partial(f*g)}{\partial x_i} = f * \frac{\partial g}{\partial x_i} \qquad \forall 1 \leq i \leq d$$

5) Soit $f \in L^p$. Soit $(\rho_n)_n$ une suite régularisante (et donc en particulier $\rho_n \in C^\infty_c$)

Alors par 4) $\rho_n * f$ est C^∞_c (le support compact vient du fait que ρ_n est à support compact)

Et par 3) $\rho_n * f \xrightarrow{L^p} f$.

Donc on a bien trouvé une suite de fonctions dans C^∞_c convergeant vers f. D'où $\overline{C^\infty_c} = L^p$.