Université Lyon I — Année universitaire 2020-2021
Département de Mathématiques — Préparation à l'agrégation

FEUILLE D'EXERCICES : GROUPES

Exercice 1. Groupes monogènes.
Soit G un groupe fini d'ordre n. On suppose que pour tout entier d il existe au plus un sous-groupe H d'ordre d dans G. Le but est de montré que G est cyclique.

(1) Soit ϕ l'indicatrice d'Euler. Montrer que pour tout d il existe au plus $\phi(d)$ éléments d'ordre d dans G.
(2) Montrer qu'il existe un élément d'ordre n.
Considérons le groupe $G = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.
(3) Soit n un entier naturel non nul. Montrer qu'il exsite exactement un sous-groupe de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ d'ordre n.
(4) Le groupe G est-il monogène ?

Exercice 2. Soit G un groupe tel que $x^2 = 1$ pour tout $x \in G$.

(1) Montrer que G est abélien.
(2) On suppose maintenant que G est fini. Soit $a_1, \cdots, a_n$ un ensemble minimal de générateur de G. Montrer que G est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$.
(3) Soit G un groupe abélien fini tel que $x^p = 1$ pour tout $x \in G$ et p premier. Montrer que G est isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\alpha$.
(4) Trouver deux groupes abéliens non isomorphes de même cardinal tels que $x^4 = 1$ pour tout x.

Exercice 3. Sous-groupes de type fini de $\mathbb{Q}$

(1) Soit H un sous-groupe additif de $\mathbb{Q}$ engendré par un nombre fini d'éléments. Montrer que H est monogène.
(2) Trouver un sous-groupe non trivial de $\mathbb{Q}$ qui n'est pas engendré par une famille finie.
(3) Montrer que les groupes $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{Q}^{+*}, \times)$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 4. Montrer qu'un groupe fini G ne peut être la réunion des conjugués d'un sous-groupe strict.

Exercice 5. Théorème de Cayley
Soit G un groupe fini et p un diviseur premier de $\sharp G$. On considère l'ensemble
$$E = \{(x_1, \ldots, x_p) \,:\, x_1 \ldots x_p = e\}.$$

(1) Dénombrer E.
(2) Montrer qu'il existe une action non triviale de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur E.
(3) Montrer qu'il existe un élément d'ordre p dans G.

Exercice 6. Théorèmes de Sylow.
Soit G un groupe fini et p un diviseur premier de $\sharp G$. Soit $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que p^α divise $\sharp G$ et $p^{\alpha+1}$ ne divise pas $\sharp G$. Un *p-Sylow* de G est un sous-groupe de cardinal p^α.

(1) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ admet un p-Sylow.
(2) Soit S un p-Sylow de G et H un sous-groupe de G. Montrer qu'il existe $g \in G$ tel que $gSg^{-1} \cap H$ est un p-Sylow de H. *Indication : utiliser l'action de H sur G/S.*
(3) En déduire que G admet un p-Sylow.
(4) Soit S un p-Sylow de G et H un p-sous-groupe. Montrer qu'il existe $g \in G$ tel que $H \subset gSg^{-1}$.
(5) Montrer que deux p-Sylow de G sont conjugués. Montrer que le nombre n_p de p-Sylow vérifie
$$n_p \equiv 1 \quad [p] \qquad n_p | \frac{\sharp G}{p^\alpha}$$
(6) Montrer qu'un groupe de cardinal 200 n'est pas simple.
(7) Soit p un nombre premier. Déterminer le nombre de p-Sylow du groupe symétrique S_p.

Exercice 7. Soit K un corps de cardinal supérieur à 7 et G un sous-groupe distingué de $\mathrm{SL}_2(K)$ qui n'est pas contenu dans le centre Z de SL_2. On se propose de montrer que $G = \mathrm{SL}_2(K)$.

(1) Montrer que l'on peut supposer que G contient une matrice de la forme
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & c \end{pmatrix}.$$
(2) Soit $a \in K$ non nul et
$$B = \begin{pmatrix} ca & a^{-1} \\ -a & 0 \end{pmatrix}.$$
Montrer que $B^{-1}A^{-1}BA \in G$ et est triangulaire supérieure.
(3) En déduire qu'il existe une matrice
$$C = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix},$$
dans G avec $x \neq \pm 1$.
(4) En considérant
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
et en utilisant $CDC^{-1}D^{-1}$, montrer que G contient toutes les matrices de la forme
$$\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
(5) Conclure.

Exercice 8. Calculs de signature.

(1) Le groupe S_n est-il isomorphe à $A_n \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?
(2) Soit σ une permutation d'un ensemble fini E et τ une d'un autre ensemble fini F.
Montrer que la signature de (σ, τ) est
$$\varepsilon(\sigma)^{\sharp F} \varepsilon(\tau)^{\sharp E}.$$
(3) Montrer que le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ contient un élément d'ordre $p^n - 1$.

Exercice 9. Automorphismes du groupe symétrique.

(1) Soit Θ un automorphisme de S_n qui envoie transposition sur transposition. Montrer que Θ est intérieur.

(2) Soit τ une transposition de S_n et σ une permutation d'ordre 2. Montrer que l'ordre de $\tau \circ \sigma$ vaut 1, 2 ou 3.

(3) On suppose que $n \geq 5$. Donnons nous une permutation τ telle que pour toute permutation σ d'ordre deux, l'ordre de $\tau \circ \sigma$ vaut 1, 2 ou 4. Montrer que τ est une transposition.

(4) En déduire, le groupe des automorphismes de S_n pour $n \geq 5$.

(5) Déterminer $\mathrm{Aut}(S_4)$.

Exercice 10. Un automorphisme exterieur de S_6.

(1) Montrer que S_5 a 6 5-Sylows.

(2) En déduire, un plongement de S_5 dans S_6.

(3) En déduire un automorphisme φ de S_6.

(4) Montrer que φ n'est pas intérieur.

Exercice 11. Polyhèdres réguliers.
Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

(1) Montrer que s'il existe une droite vectorielle δ stable par tous les éléments de G alors G est soit cyclique, soit un groupe diédral.

On suppose désormais qu'aucune droite vectorielle n'est stable par tous les éléments de G. Soit X l'ensemble des points de la sphère unité dont l'isotropie dans G est non triviale.

(2) Montrer que X est fini, stable par G.

Soit $x_1, \dots, x_s$ un système complet de représentants pour l'action de G sur X. Posons $\nu_i = \sharp G_{x_i}$.

(3) Montrer que

$$2 - \frac{2}{\#G} = \sum_{i=1}^{s}(1 - \frac{1}{\nu_i}). \tag{1}$$

Indication : considérer l'ensemble $\{(x, g) \in X \times G - \{e\} \mid gx = x\}$.

(4) On rappelle que G ne stabilise aucune droite. Quitte à renuméroter les points $x_1, \dots, x_s$, on suppose que $\nu_1 \geq \nu_2 \geq \cdots \geq \nu_s$. Montrer que $s = 3$ et que $(\#G, \nu_1, \nu_2, \nu_3)$ vaut :

(a) $(12, 3, 3, 2)$,

(b) $(24, 4, 3, 2)$,

(c) ou $(60, 5, 3, 2)$.

(5) Dans le cas $(12, 3, 3, 2)$, montrer que Ω_1 est un tétraèdre régulier.

(6) Dans le cas $(24, 4, 3, 2)$, montrer que Ω_2 (resp. Ω_1) est un cube (resp. octaèdre).

(7) Dans le cas $(24, 4, 3, 2)$, montrer que G est isomorphe à S_4.

(8) Dans le cas $(60, 5, 3, 2)$, montrer que Ω_1 (resp. Ω_2) est un dodécaèdre (resp. icosaèdre).

(9) Justifier que le dessin suivant représente combinatoirement un dodécaèdre

(10) Montrer que G est isomorphe à A_5.

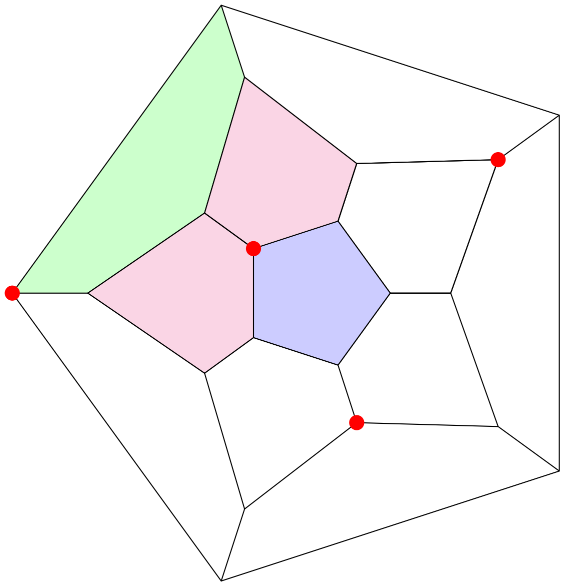

Figure 1. Dodécaèdre combinatoire

Exercice 1.