Leçon 230: série de nombres réels et complexes. Comportement des restes ou sommes partielles des séries numériques. Exemples.

Dernier rapport du jury

De nombreux candidats commencent leur plan par une longue exposition des conditions classiques assurant la convergence ou la divergence des séries numériques. Sans être hors sujet, cette exposition ne doit pas former l'essentiel de la matière de la leçon. Un thème important de la leçon est en effet le comportement asymptotique des restes et sommes partielles (équivalents, développements asymptotiques — par exemple pour certaines suites récurrentes — cas des séries de Riemann, comparaison séries et intégrales,...). **Le manque d'exemples est à déplorer.** On peut aussi s'intéresser à certaines sommes particulières, que ce soit pour exhiber des nombres irrationnels (voire transcendants), ou mettre en valeur des techniques de calculs non triviales (par exemple en faisant appel aux séries de Fourier ou aux séries entières). Enfin le jury apprécie que le théorème des séries alternées (avec sa version sur le contrôle du reste) soit maîtrisé, mais il rappelle aussi que la transformation d'Abel trouve toute sa place dans cette leçon.

Donner un exemple de chaque cas de figure suivant

1. Σu_n diverge et $u_n \to 0$ (la réciproque du critère de divergence grossière est fausse)
2. Une série dont je sais calculer explicitement la somme (autre que géométrique ou arithmétique)
3. Montrer que e est irrationnel (le rapport vous y invite et c'est sans doute l'exemple le plus élémentaire).
4. Un espace métrique E et une série à valeurs dans E qui est de Cauchy mais ne converge pas (le critère de Cauchy n'est pas vrai dans n'importe quel espace métrique)
5. Deux séries (dont le terme général n'est pas positif pour l'une au moins) pour lesquelles le th de comparaison est faux
6. Deux séries (dont le terme général change de signe) pour lesquelles le th d'équivalence est faux.
7. Une série alternée dont le terme général n'est pas décroissant (mais tend vers 0) pour laquelle le th des séries alternées est faux
8. Donner le comportement asymptotique des sommes partielles/restes des séries de Riemann
9. Pour une série entière de rayon de convergence $R = 1$, que peut-on dire de l'ensemble C des points du cercle unité où elle converge ? Exemples : le cercle entier, le cercle privé d'un point ou d'un nombre fini de points, aucun point.
10. Montrer que C est une intersection dénombrable d'unions dénombrables de fermés
11. Donner un contre-exemple au th de comparaison série-intégrale lorsque la fonction f impliquée n'est pas décroissante

Des variantes pour tester sa maitrise des développements

1. (autour du dev série harmonique) Donner les premiers termes du développement asymptotique de $\Sigma_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}$
2. (autour du dev th d'Abel angulaire) Soient (u_n), (v_n) deux suites numériques telles que les sommes partielles de Σv_n sont bornées, $u_n \to 0$ et $\sum(u_{n+1} - u_n)$ est absolument convergente, alors $\Sigma u_n v_n$ est convergente

Indications

1. Pensez au critère de Riemann
2. Pensez à la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles pour fabriquer un exemple, ou à des exemples fondamentaux comme les nombres π ou e qui s'écrivent comme sommes de séries
3. Commencer par obtenir un bon encadrement de la valeur approchée de e : $\sum_0^n 1/k! < e < \sum_0^n 1/k! +$ qq chose de petit. Raisonner ensuite par l'absurde en écrivant $e = p/q$, $p, q \in \mathbf{N}^*$ et déduire un encadrement entre nombres entiers qui ne peut être vrai.
4. Travailler dans $\mathbf{Q}$ qui n'est pas complet. Or, $e \notin \mathbf{Q}$ et donc...
5. Le th des séries alternées fournit des séries dont le terme général décroit à une vitesse arbitrairement lente. On doit donc pouvoir perturber une série alternée par un terme divergent tout en s'arrangeant pour que la nouvelle série soit plus petite.
6. Le th des séries alternées fournit des séries dont le terme général décroit à une vitesse arbitrairement lente. On doit donc pouvoir perturber une série alternée par un terme divergent sans changer son ordre de grandeur
7. Le contre-exemple ci-dessus ne fournirait-il pas la réponse ?
8. Pensez à la preuve du th de comparaison série-intégrale
9. Commencer par l'exemple le plus simple de série entière que vous connaissiez. On peut l'intégrer, la dériver, la dupliquer pour fabriquer de nouvelles situations
10. Pensez au critère de Cauchy
11. On a envie de prendre une fonction qui oscille. Pour faire converger la série, allons au plus simple et imposons que f s'annule sur les entiers. Ne reste plus qu'à s'assurer que son intégrale sur $\mathbf{R}_+$ diverge. Faire un dessin.

Pour aller plus loin

1. un exemple de suite définie par récurrence dont on sait donner un équivalent, cf. `http://math.univ-lyon1.fr/~gelineau/devagreg/Sinus_itere.pdf`
2. $\cos n$ n'a pas de limite, cf. `https://www.math.u-psud.fr/~perrin/CAPES/analyse/Suites/cos%28n%29-et-sin%28n%29.pdf`
3. (difficile) un exemple de série entière qui converge en un seul point du cercle unité, cf. `https://math.stackexchange.com/questions/288765/convergence-power-series-in-boundary/288825#288825`