Nombres et idéaux

Diviser, c'est contenir !

Le tableau qui suit permet de présenter les idéaux comme une généralisation (une idéalisation) des nombres. Par définition, si I et J sont deux idéaux, on définit

$$I + J = \{i + j,\, i \in I,\, j \in J\} \text{ et } I \cdot J = \{\sum_k i_k j_k,\, i_k \in I,\, j_k \in J\}$$

Nombres	Idéaux
$a \in \mathbb{Z}$	$(a) := \{ka,\, k \in \mathbb{Z}\}$
$m \mid n$	$(n) \subset (m)$
p est premier	(p) est maximal parmi les idéaux de $\mathbb{Z}$ distincts de $\mathbb{Z}$
$a \mid b$ et $b \mid a \Rightarrow b = \pm a$	$(a) = (b) \Rightarrow b = \pm a$
$\mathrm{pgcd}(a, b) = d$	$(a) + (b) = (d)$ (Bezout !)
$\mathrm{ppcm}(a, b) = m$	$(a) \cap (b) = (m)$
$ab = M$	$(a) \cdot (b) = (M)$
$\delta \mid a$ et $\delta \mid b \Leftrightarrow \delta \mid \mathrm{pgcd(a, b)}$	$(a) \subset (\delta)$ et $(b) \subset (\delta) \Leftrightarrow (a) + (b) \subset (\delta)$
$a \mid \mu$ et $b \mid \mu \Leftrightarrow \mathrm{ppcm(a, b)} \mid \mu$	$(\mu) \subset (a)$ et $(\mu) \subset (b) \Leftrightarrow (\mu) \subset (a) \cap (b)$