Questionnaire sur la réduction

30 septembre 2020

1 Matrices semblables/action par conjugaison.

Idées : On veut savoir si deux matrices sont semblables. On vérifie vite fait avec des invraints partiels (par exemple, le rang, la trace, les valeurs propres). Si les invariants partiels sont distincts, les matrices ne sont pas semblables. Pour montrer qu'elles le sont, alors, soit elles sont diagonalisables et il suffit qu'elles aient même polynôme caractéristique, soit elles ne le sont pas, et il faut regarder, par exemple, les dimensions des noyaux emboîtés.

1. * Quel est le coefficient de X^{n-2} dans le polynôme caractéristique d'une matrice A ? (Réponse attendue : $(\mathrm{tr}(A)^2 - \mathrm{tr}(A^2))/2$, par trigonalisation. Ou alors, la somme des mineurs diagonaux de taille 2.)

2. * On se place dans un corps k. Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ? (Elles sont semblables si et seulement si k est de caractéristique 2.)

3. * Soit M une matrice $n \times n$ à coefficients réels. On suppose que l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ représenté par M dans la base standard laisse stable un réseau de $\mathbb{R}^n$. Montrer que la trace de M est entière.

4. ** Montrer que deux matrices nilpotentes proportionnelles sont semblables. (Le plus simple est d'utiliser la dimension des noyaux emboîtés.)

5. ** Dénombrer les classes de similitude dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{F}_q)$. (Il y en a $q(q+1)$. Scalaires : q, Diagonalisables à valeurs propres distinctes : $\frac{q(q-1)}{2}$, trigonalisables non diagonalisables : q, non trigonalisables : $\frac{q(q-1)}{2}$.)
6. ** Soit T une matrice inversible à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$. On suppose 1) si l'on permute ses lignes avec une permutation α, alors on obtient une matrice T', et 2) si l'on permute ses colonnes avec une permutation β, alors on obtient la même matrice T'. Montrer que α et β sont conjuguées. (On dit cela avec des matrices de permutations et on voit que la conjugaison par T envoie la matrice de permutation P_β sur P_α. Par le théorème de Brauer, les permutations sont conjuguées. Pour montrer le théorème de Brauer, il suffit de voir que pour tout k, $\mathrm{tr}(P_\alpha^k) = \sum_{d|k} c_d(\alpha)$, où $c_d(\alpha)$ est égal au nombre de cycles de longueurs d dans α. On obtient un système triangulaire qui permet de récupérer les longueurs des cycles.).

7. *** Si deux matrices à coefficients dans un corps k infini sont semblables sur une extension L de k, sont-elles semblables sur k ? ** Le faire d'abord sur $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ (voir, [NH2G2t1, Proposition III-2.3.1].

   (Deux matrices carrées X et Y à coefficients dans k sont données. On sait qu'il existe une matrice inversible P à coefficients dans L telle que $PX = YP$. On cherche une matrice $\tilde{P}$ satisfaisant les mêmes conditions, mais à coefficients dans k. On développe les coefficients de P sur une base de L sur k : $P = t_1P_1 + \cdots + t_rP_r$, avec $t_i \in L$ et P_i à coefficients dans k. Les P_i entrelacent X et Y et le polynôme $Q(T_1, \ldots, T_r) = \det(T_1P_1 + \cdots + T_rP_r)$ n'est pas identiquement nul. Si k est infini, on peut trouver $(u_1, \ldots, u_r) \in k^r$ qui n'annule pas Q, et la matrice $\tilde{P} = u_1P_1 + \cdots + u_rP_r$ répond à la question. Le cas où k est fini est plus compliqué... voir [H2G2-t2, II-1])

Exercices impliquant la topologie des matrices.

On peut se demander quelle est l'évolution d'une suite de matrices qui converge, et surtout comment les invariants évoluent après passage à la limite.

8. * Montrer que si la suite (B^n) converge vers une matrice A, alors A est un projecteur. (Remarquer que B^n et B^{2n} ont même limite, [CVA, 1.3.30]).
9. ** Quelles sont les classes de conjugaison de matrices complexes telles que A^n converge. (Toute valeur propre λ vérifie $|\lambda| < 1$, ou alors $\lambda = 1$ avec 1 racine simple du polynôme minimal, [CVA, 1.3.30])
10. ** Montrer que dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, une matrice M est nilpotente si et seulement si la matrice 0 appartient à l'adhérence de la classe de similitude de M. (continuité du polynôme caractéristique, penser à la matrice de passage $\mathrm{diag}(1, \varepsilon, \cdots, \varepsilon^{n-1})$.)

11. ** Montrer que dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, toutes les matrices appartenant à l'adhérence d'une même classe de similitude ont mêmes valeurs propres, avec les mêmes multiplicités (algébriques). (Continuité du polynôme caractéristique, [NH2G2t1, II-2.1.1])

12. ** Montrer que dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables est l'ensemble des matrices trigonalisables. [CVA, 1.3.45]

13. ** Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, une classe de similitude de matrices peut-elle être ouverte ? Peut-elle être fermée, et si oui, à quelle condition ? (Si A est diagonalisable, sa classe de similitude est fermée, car est l'ensemble des matrices ayant même polynôme caractéristique que A et annulant le polynôme minimal de A. Pour l'autre sens, on observe que l'adhérence d'une classe de similitude contient toujours une matrice diagonalisable : partant d'une matrice triangulaire, on procède à un changement de base diagonal de la forme $e_i \mapsto t^i e_i$ et on fait $t \to 0$. [CVA, 1.3.41])

14. ** Sur $\mathbb{R}$, le critère de l'exercice précédent caractérise-t-il encore les matrices diagonalisables ? (Variante : dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, décrire la classe de similitude de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Est-elle fermée ?)

15. *** Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, l'ensemble des matrices diagonalisables est-il ouvert, fermé, connexe ? (Il est connexe, mais pas ouvert ni fermé.)

16. *** Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables à valeurs propres toutes distinctes est une partie ouverte, dense et connexe dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. (L'adhérence de notre ensemble est stable sous l'action adjointe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$; de plus, elle possède toutes les matrices triangulaires, car dans n'importe quel voisinage d'une matrice triangulaire, il y a une matrice triangulaire à valeurs propres toutes distinctes. Par ailleurs, l'ensemble des matrices ayant un polynôme caractéristique de discriminant nul est fermé. Enfin, la connexité s'obtient en combinant la connexité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ à celle de $\mathbb{C}^n$ privé de ses diagonales. [NH2G2t1, III-D.24])

17. *** Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels. Montrer que le commutant de A est de dimension au moins n. (L'ensemble des matrices A satisfaisant à la propriété voulue est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, car elle est le lieu d'annulation de tous les mineurs d'ordre $n^2 - n + 1$ de la matrice (dans une base adéquate) de l'application linéaire $\varphi : B \mapsto AB - BA$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même. Par ailleurs, cet ensemble contient un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à savoir l'ensemble des matrices dont le polynôme caractéristique est de discriminant non nul : de fait, si A vérifie cette condition, l'algèbre des polynômes en A est de dimension n. Pour en savoir plus sur la dimension, voir [H2G2-t2, Chap. II, Corollaires 2.5, 2.7])

18. *** Quelles sont les fonctions sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, polynomiales en les coefficients de la matrice, qui sont constantes sur chaque classe de similitude ? (Appelons $d_1(M)$, …, $d_n(M)$ les coefficients du polynôme caractéristique d'une matrice M. Soit f une fonction polynomiale sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, invariante sous l'action adjointe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. La restriction de f à l'ensemble des matrices diagonales est donnée par un polynôme symétrique en les coefficients de la matrice diagonale, donc par un polynôme P en les d_1, …, d_n. L'ensemble $\{M \mid f(M) = P(d_1(M), \ldots, d_n(M)\}$ est un fermé, stable sous l'action adjointe, et qui contient l'ensemble des matrices diagonales. Voir [NH2G2t1, III-D.29])

2 Sous-espaces stables d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

Cours : voir [H2G2-t2, Chap. II-1]

2.1 Un peu de recul

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur un corps k.

Propriétés générales des sous-espaces stables. L'ensemble des sous-espaces stables est stable par intersection et par somme, ce qui permet de parler du sous-espace stable engendré par une partie. On décrit aisément le sous-espace stable engendré par un vecteur. Exemple : les $\ker P(u)$ et $\operatorname{im} P(u)$ sont des sous-espaces stables. On peut également à ce stade parler de drapeau stable (en lien avec la trigonalisation) et indiquer le lien avec la dualité (un sous-espace vectoriel F de E est stable par u si et seulement si $F^\perp$ est stable par ${}^t u$).

Un exemple : les endomorphismes cycliques. Les trois propriétés (a), (b) et (c) ci-dessous sont équivalentes : (a) l'espace E tout entier est engendré, en tant que sous-espace stable, par un seul vecteur ; (b) le polynôme minimal de u est égal à son polynôme caractéristique ; (c) le commutant de u est $k[u]$. Elles entraînent la propriété suivante : (d) il n'y a qu'un nombre fini de sous-espaces stables ; si le corps de base est infini, (d) est équivalente aux trois autres propriétés.

Dans le cadre d'un espace E muni d'un endomorphisme cyclique u, on dispose d'un générateur x de E et donc, d'un morphisme surjectif $\phi_u : \mathbb{K}[X] \to E$ qui envoie P sur $P(u)(x)$. A chaque sous-espace u-stable F de E on associe $\phi_u^{-1}(F)$, qui est un idéal qui contient (μ_u) et donc engendré par un unique polynôme unitaire D_F qui divise μ_u. Comme ϕ_u est surjective, $\phi_u(\phi_u^{-1}(F)) = F$. Et donc F est engendré par $D_F(u)$ comme u-sous-espace stable.

Recherche des sous-espaces stables dans le cas général. Utilisant le lemme des noyaux, écrivons E comme somme directe des sous-espaces caractéristiques de u (ou primaires si le polynôme minimal de u n'est pas scindé). Ce même lemme des noyaux implique qu'un sous-espace stable est somme de ses intersections avec ces sous-espaces caractéristiques (on rappelle que ces sous-espaces sont de dimension la multiplicité algébrique de l'enodmrphisme). La recherche des sous-espaces stables se ramène donc au cas des endomorphismes pour lesquels le polynôme minimal est une puissance d'un irréductible, et on peut en fait se contenter de traiter le cas des endomorphismes nilpotents.

Existence d'un supplémentaire stable et semi-simplicité. Pour qu'un sous-espace stable F engendré par un seul élément ait un supplémentaire stable, il suffit que $u\big|_F$ ait même polynôme minimal que u. Ce fait et la décomposition en sous-espaces primaires établissent le sens direct de la proposition suivante : le polynôme minimal de u est sans facteur carré si et seulement si tout sous-espace stable admet un supplémentaire stable.

2.2 Exercices

1. * Que pouvez-vous dire de l'ensemble des sous-espaces stables de u ? Est-il fini, infini, stable par somme, par intersection ? Les opérations de somme et d'intersection munissent-elles l'ensemble des sous-espaces stables d'une structure d'anneau ?

2. ** On peut obtenir des sous-espaces stables en prenant $\ker P(u)$ et en faisant varier P dans $k[X]$. Obtient-on ainsi tous les sous-espaces stables ? Obtient-on ainsi un nombre fini ou infini de sous-espaces stables ? ($\ker P(u) = \ker P(u) \cap \ker(\mu_u(u)) = \ker D(u)$, où D est le pgcd de P et μ_u. Or, il y a un nombre fini de diviseurs unitaires de μ_u.)

3. * Si v commute avec u, il laisse stable tous les espaces de la forme $\ker P(u)$ ou $\operatorname{im} P(u)$. Mais laisse-t-il stable tous les espaces stables pour u ? (Non, prendre $u = 0$ ou l'identité)

4. * Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E. Comment montrez-vous que les sous-espaces propres de u sont en somme directe ? Que dire si u laisse stable toutes les droites de E ?

5. * Soit F un sous-espace stable par un endomorphisme trigonalisable u. Montrer que F est somme directe de ses intersections avec les sous-espaces caractéristiques de u.

6. * On regarde l'espace vectoriel k^n, avec sa base standard $(e_1, \ldots, e_n)$. Le groupe $\mathrm{GL}_n(k)$ agit sur k^n, donc agit sur l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension p de k^n. Cette action est-elle transitive ? Quel est le stabilisateur du sous-espace engendré par $(e_1, \ldots, e_p)$?

7. ** Lemme de Fitting : soit u un endomorphisme de E. La suite croissante (respectivement, décroissante) des sous-espaces vectoriels $\ker(u^n)$ (respectivement, $\mathrm{im}(u^n)$) stationne à partir d'un certain rang ; on note $\ker(u^\infty)$ (respectivement, $\mathrm{im}(u^\infty)$) la valeur limite. Montrer que $E = \ker(u^\infty) \oplus \mathrm{im}(u^\infty)$. Voir [CVA, 1.3.58]

8. ** Dresser la liste des sous-espaces stables pour un morphisme nilpotent u ayant un seul bloc de Jordan (c'est-à -dire ayant dans une base appropriée une matrice avec des 1 sur la surdiagonale et des 0 partout ailleurs, [H2G2-t2, Exercice B7]).

9. ** Trouver tous les sous-espaces stables de l'endomorphisme de k^4 dont la matrice dans la base canonique est
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

10. ** Soit u un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel E. Quels sont les sous-espaces stables sous l'action de u ? Montrer que chaque sous-espace stable admet un supplémentaire stable.

11. * Soit u un opérateur normal d'un espace euclidien. Montrer que si F est stable par u, alors $F^\perp$ est aussi stable par u.

12. ** Soit E l'espace vectoriel des fonctions C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il n'existe pas d'endomorphisme T de E tel que T^2 soit la dérivation. (Supposons qu'un tel T existe. Appelons D la dérivation et prenons un entier $n \geq 2$. L'espace vectoriel $F = \ker D^n$ des polynômes de degré au plus $n-1$ est stable par D et T. La restriction de T à F est nilpotente ; sa puissance n-ième est donc nulle. Cependant celle de D^{n-1} ne l'est pas.)

13. ** Soit E un espace vectoriel de dimension n et soient u_1, ..., u_n des endomorphismes nilpotents de E commutant deux à deux. Montrer l'existence d'une base de E dans laquelle tous les u_i ont une matrice strictement triangulaire supérieure, et en déduire que $u_1 \circ \cdots \circ u_n = 0$. [NH2G2t1, III-D.12]

14. *** Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. (i) Montrer que u est simple (c'est-à -dire que $\{0\}$ et E sont les seuls sous-espaces stables) si et seulement si son polynôme caractéristique est irréductible. (ii) Montrer que u est semi-simple (c'est-à -dire que tout sous-espace stable admet un supplémentaire stable) si et

seulement si son polynôme minimal est sans facteur carré. Voir [H2G2-t2, Proposition 1.6]

15. *** Montrer que les quatre propriétés suivantes concernant un endomorphisme u d'un espace vectoriel E de dimension finie sur un corps k infini sont équivalentes : (a) u est cyclique, c'est-à -dire qu'il existe $x \in E$ n'appartenant à aucun espace stable autre que E ; (b) les polynômes minimal et caractéristique de u sont égaux ; (c) le commutant de u est l'ensemble des polynômes en u ; (d) E n'a qu'un nombre fini de sous-espaces stables. (Voir [H2G2-t2, Exercice B.6])

16. ** Théorème de Maschke : soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps k de caractéristique 0 et soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(E)$. Soit F un sous-espace de E stable par chaque $g \in G$. Montrer qu'il existe un supplémentaire H de F dans E stable par chaque $g \in G$. (Soit $p : E \to E$ un projecteur d'image F. Alors $p^\natural = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gpg^{-1}$ est encore un projecteur d'image F, qui commute à tous les $g \in G$. On prend alors $H = \ker p^\natural$. Voir [NH2G2t2, XIII-1.7])

3 Polynômes d'endomorphismes. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie.

3.1 Un peu de recul

Soit E un espace vectoriel sur un corps k. Il s'agit d'étudier l'application $(P, u) \mapsto P(u)$ de $k[X] \times \mathrm{End}(E)$ dans $\mathrm{End}(E)$. En général, on fixe u et on étudie le noyau et l'image de l'homomorphisme d'algèbres " évaluation en u " de $k[X]$ dans $\mathrm{End}(E)$.

Polynômes annulateurs. Notion de polynôme minimal, théorème de Cayley-Hamilton. Toute racine du polynôme caractéristique est racine du polynôme minimal. Plus généralement, $\mu_u \mid \chi_u \mid \mu_u^n$. Caractérisation des endomorphismes diagonalisables et trigonalisables. Endomorphismes semi-simples.

3.2 Exercices

1. * Soit u un endomorphisme. Le polynôme minimal de la transposée de u est-il nécessairement égal au polynôme minimal de u ? (ils ont même polynômes annulateurs...)

2. * Soit u un endomorphisme, P un polynôme. D'une façon générale, sait-on décrire le spectre de $P(u)$? (Voir [NH2G2t1, III-D.2])

3. * Dans la décomposition de Dunford matricielle $M = D + N$ d'une matrice complexe, montrer que si M est réelle, alors D et N le sont. (utiliser les projecteurs spectraux.)

4. * Quelle est la décomposition de Dunford de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$? Et en remplaçant

le 4 par un 1 ?

5. * Soit M une matrice carrée réelle. L'exponentielle e^M est-elle un polynôme en M ? (le sous-espace $\mathbb{R}[M]$ est fermé, on est en dimension finie !)

6. ** Comment montrez-vous qu'une matrice dont le polynôme caractéristique est scindé est trigonalisable ?

7. ** Le polynôme minimal d'une matrice dépend-il du corps de base ? (non, grâce à une propriété d'invariance du rang, voir [NH2G2t1, III-5.2])

8. ** Montrer qu'une matrice N est nilpotente si et seulement si $\mathrm{tr}(N^k) = 0$ pour tout $k > 0$. ([CVA, 1.3.3])

9. *** Théorème de Cayley-Hamilton : soit M une matrice carrée à coefficients dans un anneau commutatif A (non nécessairement intègre). Soit χ le déterminant de la matrice $XI-M$, à coefficients dans $A[X]$. Comment montrez-vous que $\chi(M) = 0$? (En développant le déterminant selon les lignes de $XI - A$, on obtient l'égalité $(XI - A)B = \chi I$, où B est la comatrice de $XI - A$. Ecrivons $B = B_{n-1}X^{n-1} + \cdots + B_1X + B_0$ et $\chi = c_nX^n + c_{n-1}X^{n-1} + \cdots + c_1X + c_0$. L'égalité $(XI - A)B = \chi I$ fournit alors $B_{k-1} - AB_k = c_kI$, avec $B_n = B_{-1} = 0$ par convention. Multipliant à gauche par A^k et sommant pour k entre 0 et n, on trouve $0 = \chi(A)I$. Accessoirement, chaque B_k est un polynôme en A.)

10. ** Soit A une matrice carrée à coefficients dans un corps fini $\mathbb{F}_q$. Montrer que A est diagonalisable (sur $\mathbb{F}_q$) si et seulement si $A^q = A$, voir [CVA, 1.3.52].

11. ** Soit k un corps, u un endomorphisme d'un k-espace vectoriel de dimension finie, et P et Q des polynômes à coefficients dans k. Déterminer le noyau et l'image de $\mathrm{PGCD}(P, Q)(u)$ et $\mathrm{PPCM}(P, Q)(u)$.([CVA, 1.1.9])

12. *** Soit u un endomorphisme d'un k-espace vectoriel E de dimension finie. Pour $x \in E$, on note $\mu_{u,x}$ le générateur unitaire de l'idéal $\{P \in k[X] \mid P(u)(x) = 0\}$. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\mu_{u,x}$ soit le polynôme minimal de x. A quoi cela peut-il être utile ? (Voir [NH2G2t1, Proposition III-5.4]

13. *** Soient A et B deux matrices carrées de même taille, à coefficients entiers. On suppose que $\det(A)$ et $\det(B)$ sont premiers entre eux. Montrer l'existence de deux polynômes P et Q à coefficients entiers tels que $AP(A) + BQ(B) = I$. (Le polynôme caractéristique de A est à coefficients entiers, de terme constant $\det(A)$, et annule A. A partir de lui, on construit aisément un polynôme $\tilde{P}$ à coefficients entiers tel que $A\tilde{P}(A) = \det(A)I$. De même, on trouve un polynôme $\tilde{Q}$ à coefficients entiers tel que $B\tilde{Q}(B) = \det(B)I$. On utilise alors le théorème de Bézout scalaire pour conclure.)

14. ** Montrer la décomposition de Jordan multiplicative : sur un corps de caractéristique nulle, tout endomorphisme inversible x de polynôme caractéristique scindé s'écrit de

façon unique $x = su = us$ avec s diagonalisable et u unipotent. (voir [NH2G2t1, VI-2.2])

15. ** Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, soit $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = P(A)^k$. (Variante : $A = e^{P(A)}$. Voir [NH2G2t1, VI-B.13])

16. ** Soit $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Montrer que l'application $A \mapsto A^k$ est un homéomorphisme de l'ensemble des matrices unipotentes sur lui-même, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
(penser que l'exponentielle réalise un homéomorphisme de l'ensemble des matrices nilpotentes vers l'ensemble des matrices unipotentes : il est polynomial dans les deux sens !)

17. ** Soit E un espace vectoriel complexe de dimension finie. Montrer qu'un endomorphisme inversible u est diagonalisable si et seulement si u^2 l'est. L'hypothèse u inversible est-elle nécessaire ? (penser au polynôme minimal scindé. Si u est nilpotent d'indice 2, on a un contre-exemple à la deuxième question.)

18. ** Soit B une matrice 2×2 à coefficients complexes. Résoudre l'équation $X^2 = B$ portant sur la matrice X. (Distinguer les cas B diagonalisable à valeurs propres distinctes (X doit commuter avec B), B scalaire non-nulle (disons $B = \mathrm{id}$), $B = 0$ (cela donne X nilpotente), B unipotente (si $B \neq \mathrm{id}$, alors $\pm X$ est unipotente ; on sait en outre que $M \mapsto M^2$ est un homéomorphisme de l'ensemble des matrices unipotentes dans lui-même), B nilpotente non nulle (pas de solution).)

19. ** Soit N la matrice nilpotente de taille $n \times n$ avec un seul bloc de Jordan (donc avec des 1 sur la surdiagonale et des 0 partout ailleurs). Montrer que le commutant de N est $k[N]$. Voir [NH2G2t1, III-D.11]

20. ** Sur un espace euclidien (en dimension finie, donc), u est normal si et seulement si u^* est un polynôme en u. (En diagonalisant en base unitaire sur $\mathbb{C}$, on montre qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $u^* = P(u)$. Cela signifie que la matrice de u^* appartient au $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel engendré par les matrices de id, u, u^2, ... Il appartient donc au $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel engendré par ces mêmes matrices.

4 Autres exercices

1. * Diagonaliser une matrice carrée dont tous les coefficients sont égaux à 1.
2. * Dans la décomposition de Dunford $A = D+N$, à quelle condition A est-elle semblable à D ?
3. * Soit N une matrice nilpotente. Montrer que $I + N$ est inversible. Si A est inversible et commute avec N, montrer que $A + N$ est inversible.
4. ** Le sous-groupe D du groupe des matrices inversibles $n \times n$ forme des matrices diagonales est-il distingué ? Sur un corps infini (pour faire plus simple), déterminer son normalisateur N ainsi que que le quotient N/D. (D est le centralisateur de D, et $N/D \simeq \mathfrak{S}_n$. [NH2G2t1, III-D.6])
5. ** Soit C_A la classe de conjugaison d'une matrice complexe A. Montrer que C_A est fermée si et seulement si A est diagonalisable. Que se passe-t-il dans le cas réel ? ([NH2G2t1, Prop. III-1.7])
6. ** Quel est le déterminant de l'endomorphisme transposé : $M \mapsto^t M$? (quelles sont les valeurs propres de l'endomorphisme tranposé ? Avec quelles multiplicités ?)
7. * Montrer que deux projections sont semblables si et seulement si elles sont équivalentes.([NH2G2t1, Prop III-D.3])
8. ** Montrer que tout endomorphisme réel de dimension finie possède un sous-espace stable de dimension ≤ 2. (Appliquer le lemme des noyaux à un annulateur réel et trouver x non nul dans $\ker(P(u)$ avec P irréductible sur $\mathbb{R}$. Voir [NH2G2t1, V-D.25])
9. ** Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$. D'abord sur $\mathbb{C}$ en commençant par le cas ou B est inversible. (voir [NH2G2t1, Proposition II-2.1.1]) Puis *** sur un corps k quelconque, en commençant par B_0 la matrice "canonique" de rang r. (On commute $BA \to PB_0QA \to B_0QAP \to QAPB_0 \to APB_0Q \to AB$).
10. ** Soit A une matrice carrée. Montrer que
$$B := \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$$
est diagonalisable si et seulement si A est nulle. (Critère par un polynôme annulateur scindé simple, calculer par récurrence sur k la matrice B^k.)
11. ** Soit A, B deux matrices carrées. Quel est le polynôme minimal de C
$$C := \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}?$$
Montrer que C est diagonalisable si et seulement si A et B le sont. (Montrer que μ_C est le PPCM de μ_A et μ_B.)
12. ** Montrer que si un ouvert de $M_n(\mathbb{C})$ contient les matrices diagonales et est stable par conjugaison, alors il est égal a $M_n(\mathbb{C})$ tout entier. (les matrices diagonalisables sont denses, [NH2G2t1, III-D.22])

13. ** Quelles sont les classes de conjugaison bornées dans $M_n(\mathbb{C})$?(les homothéties, on se ramène au cas $n = 2$. [NH2G2t1, III-D.23])

14. ** Soit A une matrice carrée complexe. Quel est l'ensemble des polynômes P tq $P(A)$ est nilpotente ? *($\prod_i(X-\lambda_i)$), ou on parcourt toutes les valeurs propres. En fait c'est la racine de l'ideal annulateur de A. [NH2G2t1, III-D.15]*

15. ** Montrer qu'un endomorphisme (complexe) cyclique est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique n'a que des racines simples. *s'il est cyclique* $chi_A = pi_A$.

16. ** Soit A une matrice complexe diagonalisable. Montrer que $\phi_A : M \to AM - MA$ est diagonalisable. Même chose pour nilpotente. (Critère par les polynômes annulateurs, [CVA, 1.3.19])

17. ** Trouver une matrice de $\mathcal{MC}_2(\mathbb{R})$ qui n'est pas dans la clôture de l'ensemble des matrices diagonalisables. (penser au signe du discriminant du polynôme caractéristique, [CVA, 1.3.40])

18. *** Soit k un corps quelconque. Montrer que A est trigonalisable sur k si et seulement si $A - XId$ est trigonalisable sur $k(X)$.

    (On dit que les racines du polynôme car de $A - XId$ sont dans $k(X)$ donc dans $k[X]$ (int. clos) donc comme elles ne peuvent pas être dans k elles sont de degré 1, donc le polynôme caractéristique de A est scindé et A est trigonalisable.)

19. ** Montrer que toute matrice de trace nulle est semblable a une matrice avec que des zéros sur la diagonale. (On fait une récurrence sur la taille de la matrice, si pour tout x, $\phi(x)$ est colinéaire a x alors on a une matrice nulle, sinon il existe x tq x et $\phi(x)$ est libre que l'on complète en une base, ce qui donne une matrice semblable avec un zéro en haut à gauche en prenant x comme premier vecteur de base.) En déduire que vect$\mathcal{N}$ est l'hyperplan de trace nulle. (en fait toute matrice de trace nulle est du coup semblable a la somme de deux matrices respectivement strictement triangulaire inférieure et supérieure.)

20. ** Montrer que dans la décomposition de Dunford de $\mathbb{C}$, l'application $M \mapsto D$ n'est pas continue.

    (elle est constante sur les diagonalisables, par l'abursde [1] elle serait constante partout par densité.)

Références

[CVA] Carnet de voyage en Algébrie, Philippe Caldero, Marie Péronnier, Calvage et Mounet (2019).

[H2G2-t2] Histoires Hédonistes de Groupes et de Géométries, Philippe Caldero, Jérôme Germoni, Calvage et Mounet (2015).

[NH2G2t1] Nouvelles Histoires Hédonistes de Groupes et de Géométries, Philippe Caldero, Jérôme Germoni, Calvage et Mounet (2018).

[NH2G2t2] Nouvelles Histoires Hédonistes de Groupes et de Géométries, Philippe Caldero, Jérôme Germoni, Calvage et Mounet (2017).

1. Pas de panique ! Ceci est une typo assumée.