Questionnaire sur dimension et rang.

1. * Pourquoi un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie possède des polynômes annulateurs ?
2. * Soit A une matrice carrée de rang 1. Mq A est diagonalisable ssi $tr(A)$ non nul.
3. ** Trouver le nombre de matrices nilpotentes $n \times n$ de rang $n-1$ a coefficients dans $\mathbb{F}_q$.
4. * Quel est le rang de la comatrice d'une matrice carree A en fonction du rang de A ?
5. ** On se place dans $\mathrm{mat}_{m,n}(\mathbb{R})$. Pour quelles valeurs de r l'ensemble des matrices de rang r est-il connexe ? Même question en remplaçant " connexe " par " ouvert ". Quel est l'adhérence de cet ensemble ?
6. * Y a-t-il une formule simple pour la dimension de la somme de trois sous-espaces vectoriels, disons F, G et H ? (Cela amène le candidat à s'interroger si $F \cap (G+H) = F \cap G + F \cap H$.)
7. * Le rang d'une matrice dépend-il du corps de base ?
8. ** Le polynôme minimal d'une matrice carrée dépend-il du corps de base ?
9. ** Soit A une matrice $n \times n$, réelle. La dimension sur $\mathbb{R}$ du commutant de A dans $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ est-elle égale à la dimension sur $\mathbb{C}$ du commutant de A dans $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$?
10. * Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Décrire les orbites pour l'action de $\mathrm{GL}(E)$ sur l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E.
11. ** Soit k un corps. Montrer qu'une k-algèbre commutative intègre de dimension finie est un corps
12. *** Une matrice nilpotente est semblable à une matrice diagonale par blocs de Jordan. Pourquoi la taille des blocs est-elle unique ?
13. *** Pourquoi l'ensemble des nombres algébriques est-il un sous-corps de $\mathbb{C}$?