Questions en vrac pour l'oral de l'agrégation

9 juin 2020

1. Contenu : grosso-modo, une moitié de questions vraiment posées à l'oral d'agreg (trouvées sur le net ou rapportées par les précédentes promos), soit des questions posées à la prépa agreg de Nancy.
2. Des questions sont régulièrement ajoutées, utiliser la version web de l'outil ou bien télécharger la dernière version du pdf, qui est sur `http://www.iecl.univ-lorraine.fr/~Damien.Megy/enseignement/agreg/`.
3. Utilisation : les exercices sont affichés en vrac (algèbre/analyse). Utiliser la recherche. Un système est en préparation pour afficher le numéro des leçons concernés.
4. Pour l'instant, il y a surtout de l'algèbre, et surtout sur des choses de niveau L3 ou plus, vu la multitude d'exercices disponibles niveau L2 sur le net. (Edit : il y a de plus en plus de questions niveau L1/L2, pour coller à l'oral.)
5. Une liste semblable est celle d'Olivier Debarre et Yves Laszlo. Au départ, on a fait en sorte qu'il n'y ait pas de doublons, maintenant cette contrainte est laissée de côté, sans chercher non plus à ce que cette liste contienne l'autre.
6. En cas d'erreur sur un énoncé ou une indication, me contacter en précisant le numéro de l'exercice (après avoir vérifié auprès du reste de la promo).
7. Les solutions ne sont intentionnellement pas affichées : il vaut mieux revenir sur un exercice une semaine ou un mois plus tard, une fois le cours relu, que de lire une correction. Je vous enverrai le fichier avec solutions un petit mois avant les oraux.
8. **Attention**, certaines questions sont difficiles. On ne s'attend pas forcément à ce que les candidats répondent du tac au tac. Le jury pourra éventuellement donner des pistes de réflexion. D'autre part, il est fortement conseillé de bétonner à fond le programme L1/L2 en priorité.

Table des matières

1 Énoncés

Exercice 1000 Indication

Que peut-on dire des sous-groupes de $\mathbb{U}$? Existe-t-il des sous-groupes infinis mais non denses dans $\mathbb{U}$?

Exercice 1001 Indication

Déterminer tous les morphismes continus de $\mathbb{U}$ dans $GL_n(\mathbb{C})$. L'image est-elle un sous-groupe distingué ?

Exercice 1002 Indication

Donner un homéomorphisme entre $\mathbb{C}^*$ et $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{U}$. Peut-on généraliser ce résultat ?

Exercice 1003 Indication

Trouver tous les éléments de $\mathbb{U}$ dont les parties réelles et imaginaires sont des rationnels. Application à l'équation diophantienne $x^2 + y^2 = z^2$?

Exercice 1004

Définir à l'aide du groupe $\mathbb{U}$ l'angle orienté entre deux vecteurs non nuls du plan.

Exercice 1005

Montrer que si p est le plus petit facteur premier de $|G|$, et H est d'indice p dans G, alors H est distingué dans G.

Exercice 1006 Indication

Mettre en évidence sur un exemple explicite le fait que si H n'est pas distingué dans G, le quotient ensembliste ne peut pas être muni de structure de groupe compatible avec la surjection canonique. Prendre l'exemple « le plus petit possible ».

Exercice 1007 Indication

Existe-t-il des groupes (finis) non abéliens, mais dont tous les sous-groupes sont quand même distingués ?

Exercice 1008

Donner des exemples simples de groupes dérivés. Quel est le groupe dérivé de Q_8 (quaternions), par exemple ?

Exercice 1009

Conditions sur les coefficients d'une matrice symétrique 2×2 pour qu'elle soit définie positive (sans utiliser la diagonalisabilité). Preuve ?

Exercice 1010 Indication

Nature topologique des formes quadratiques définies positives dans l'ensemble des formes quadratiques.

Exercice 1011

À quelle condition la matrice réelle $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Et sur $\mathbb{C}$?

Exercice 1012

À quelle condition la matrice réelle $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Et sur $\mathbb{C}$?

Exercice 1013

À quelle condition la matrice réelle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Et sur $\mathbb{C}$?

Exercice 1014

Quels sont les groupes simples (non abéliens) que vous connaissez ?
Quel est le plus petit ?

Exercice 1015

Est-ce que $\mathbb{F}_4$ est inclus dans $\mathbb{F}_8$?

Exercice 1016

Soit A une matrice carrée entière, et p un premier. Montrer que $\mathrm{Tr}(A^p) \equiv \mathrm{Tr}(A) \mod p$.

Exercice 1017

Un sous-groupe fini du groupe multiplicatif d'un corps commutatif est cyclique. Et pour un corps non commutatif ?

Exercice 1018

Pour quels k le groupe alterné A_n est-il k-transitif ?

Exercice 1019

Trouver un ensemble à six éléments sur lequel agit naturellement S_5. À quoi ça sert ?

Exercice 1020

Décrire tous les sous-groupes de Sylow de S_3 et S_4. En particulier, décrire avec soin les 2-Sylow de S_4 : liste des éléments, groupe classique auquel ils sont isomorphes, et interprétation géométrique.

Exercice 1021

Décrire géométriquement tous les éléments de S_4, d'abord vu comme groupe des isométries d'un tétraèdre, puis vu comme le groupe des rotations du cube.

Exercice 1022

Résoudre $x^2 + 2x + 2 = 0$ et $x^2 + 2x + 3 = 0$ sur $\mathbb{F}_5$. La méthode avec le discriminant est-elle valable sur un corps fini ?

Exercice 1023

Combien y a-t-il de racines n-èmes de l'unité dans $\mathbb{F}_q$?

Exercice 1024

Quel est le cardinal de $GL_n(\mathbb{F}_q)$, de $SL_n(\mathbb{F}_q)$, de $PGL_n(\mathbb{F}_q)$ et enfin de $PSL_n(\mathbb{F}_q)$?

Exercice 1025

Comparer les rangs sur $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{F}_p$ d'une matrice entière. Que dire de l'ensemble des p où le rang diffère ?

Exercice 1026 Indication

Soit ϕ un morphisme de $\mathfrak{S}_n$ vers $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Que dire de ϕ ?

Exercice 1027 Indication

Soit ϕ un morphisme de $GL_n(\mathbb{F}_q)$ vers $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Que dire de ϕ ?

Exercice 1028

Déterminer tous les morphismes de groupes entre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Même chose pour les morphismes d'anneaux.

Exercice 1029

Soit $\phi : A \to B$ un morphisme d'anneaux. L'image réciproque d'un idéal premier est-elle un idéal premier ? L'image réciproque d'un idéal maximal est-elle un idéal maximal ? Expliquer/illustrer.

Exercice 1030

Il existe une notion plus forte que celle de sous-groupe distingué : celle de sous-groupe caractéristique (stabilité sous tout automorphisme, pas seulement les automorphismes intérieurs). Montrer que le centre et le groupe dérivé sont des sous-groupes caractéristiques.

Exercice 1031 Indication

Pour chaque polygone et polyèdre régulier, le groupe des isométries directes est à chaque fois d'indice deux dans le groupe des isométries. Est-ce qu'on a un produit semi-direct ? Un produit direct ?

Exercice 1032

Montrer qu'un sous-groupe ou un quotient d'un groupe résoluble est résoluble. Montrer réciproquement que si l'on a une suite exacte

$$1 \to N \to G \to Q \to 1$$

et que N et Q sont résolubles, alors G aussi. (Reformulation : une extension de groupes résolubles est résoluble.)

Exercice 1033

Quel est le cardinal de la classe de conjugaison de $(12)(34)$ dans $\mathfrak{A}_5$?

Exercice 1034

À propos du théorème de Cayley : quelle en est une preuve, ou une idée de preuve ? À quoi sert ce théorème en pratique ?

Exercice 1035

Preuve rapide et élémentaire du fait que S_n n'est pas abélien (pour quels n ?)

Exercice 1036

Calculer rapidement le cardinal du groupe alterné A_n. Donner plusieurs définitions équivalentes de la signature.

Exercice 1037

Expliquer, si possible de plusieurs manières, pourquoi la signature est le seul morphisme de S_n dans $\mathbb{C}^*$.

Exercice 1038

Calculer la signature d'une permutation explicite. Comparer la vitesse des différentes méthodes possibles.

Exercice 1039 Indication

Combien y a-t-il de partitions de $\{1, 2, 3, 4\}$ en deux ensembles de cardinal deux ?

En déduire un morphisme de $\mathrm{Isom}(\mathrm{Cube})$ vers S_3. Géométriquement, ça revient à agir sur quel ensemble à trois éléments ? Quel est le noyau de ce morphisme ? Son image ?

Bonus : écrire le caractère de la représentation de S_4 que l'on obtient ainsi. Cette représentation est-elle irréductible ?

Exercice 1040

Soient $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ nilpotentes , de même rang et polynôme minimal.

1. Si $n < 7$, montrer que A et B sont semblables.
2. Montrer que ce n'est pas le cas si $n = 7$ ou si les matrices ne sont pas nilpotentes.

Exercice 1041

Déterminer les groupes d'automorphismes de $C_2 \times C_4$ et de $C_2 \times C_6$.

Exercice 1042

Si $k = \mathbb{F}_2$ ou $\mathbb{F}_3$, que sont les groupes $SL_2(k)$, $D(GL_2(k))$ et $D(SL_2(k))$? Que dire de la simplicité de $PSL_n(\mathbb{F}_q)$ lorsque $n = 2$ et $q \leq 3$?

Exercice 1043 Indication

Décrire $O(2)$ et $SO(2)$ (composantes connexes, forme paramétrée). Pareil pour $O(1,1)$. De façon générale, combien de composantes connexes a le groupe $O(p,q)$? Et $SO(p,q)$?

Exercice 1044

Dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, quels sont les ordres des éléments, et combien d'éléments de chaque ordre y a-t-il ? Quels sous-groupes engendrent-ils ? Combien y a-t-il de sous-groupes ?

Exercice 1045

Dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, quel est l'ensemble des éléments de n-torsion ? Quel est son cardinal ? Détailler plusieurs exemples.

Exercice 1046

Expliquer comment écrire une permutation comme produit de transpositions, puis comme produit de transpositions du type $(i\,i+1)$, de deux manières :

1. à l'aide du dessin où on relie les entiers à leur image,
2. en suivant la preuve abstraite (par récurrence), qui fournit un algorithme.

Exercice 1047

Prouver qu'un sous-groupe fini multiplicatif d'un corps (par convention commutatif) est cyclique à l'aide du théorème de structure des groupes abéliens finis.

Exercice 1048 Indication

Quelles applications pour le théorème de Burnside sur les groupes linéaires d'exposant fini ? À quoi sert ce théorème et dans quel contexte le placer ? Est-il vrai pour $\mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{C}$? Que peut-on dire de simple en caractéristique positive ? (Donner des exemples de corps infinis de caractéristique p.)

Exercice 1049

Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$, dont tous les éléments sont d'ordre fini. Est-il forcément fini ?

Exercice 1050

Montrer que le centre de $GL(E)$ est l'ensemble des homothéties.

Exercice 1051

Quel est le cardinal de $GL_2(\mathbb{F}_2)$? À quoi est isomorphe ce groupe ?

Follow-up : connaissez-vous d'autres tels isomorphismes, ou plus généralement de morphismes de groupes linéaires vers des groupes symétriques ?

Exercice 1052

Quel est le rapport entre le fait que GL est engendré par les transvections et dilatations, et le fait que le pivot de Gauss laisse le rang inchangé ?

Exercice 1053

Soit $n \in \mathbb{N}$, et A une matrice $n \times n$.. Quel nombre minimum de coefficients est-il suffisant de modifier pour être certain que A devienne inversible ?

Exercice 1054

Dresser la table de caractères de S_3. (Très court : en fait, ceci peut même être esquissé lors de la défense du plan, pour illustrer.)

Exercice 1055

Dresser la table de caractères du groupe des quaternions Q_8.

Exercice 1056 Indication

Si G est un groupe agissant sur un ensemble X, alors G agit sur $\mathbb{C}^X := \text{Fonctions}(X, \mathbb{C})$ de manière naturelle. Préciser comment.

Si X est fini de cardinal n, montrer que ceci définit une représentation linéaire de G de dimension n. Écrire le caractère de cette représentation.

Exercice 1057

Soit G un groupe fini et (V, ρ) une représentation réelle de dimension finie. Montrer qu'il existe un produit scalaire invariant.

Et si G est infini, qu'est-ce qui ne marche pas ? Expliquer sur un exemple.

Exercice 1058

Montrer que l'action du groupe modulaire sur le demi-plan est vraiment une action de groupe.

Exercice 1059 Indication

Comment calcule-t-on les indicatrices d'Euler $\phi(n)$? Par exemple, combien vaut $\phi(72)$? Existe-t-il un moyen algorithmiquement efficace de calculer les indicatrices d'Euler ?

Exercice 1060

Exemples de groupes infinis avec un système de générateurs ? De groupes infinis avec un système fini de générateurs (à part $\mathbb{Z}$) ?

Exercice 1061

Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs, de deux manières différentes.

Exercice 1062

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$ est un entier pair.

Exercice 1063

Donner plusieurs exemples d'anneaux :

1. non intègres ;
2. intègres mais non factoriels ;
3. factoriels non principaux ;
4. principaux non euclidiens.

Exercice 1064

Montrer que si A est un anneau, alors $A[X]$ est principal si et seulement si A est un corps.

Exercice 1065 Indication

Démontrer que $\mathbb{Z}[X]$ n'est pas principal autrement qu'en trouvant un idéal non principal, ou qu'en utilisant la CNS de principalité des anneaux $A[X]$.

Exercice 1066

L'anneau des fonctions holomorphes est-il principal ? Est-il factoriel ?

Exercice 1067

Dans le théorème chinois, comment trouver un isomorphisme inverse ? Par exemple,

$$(n \equiv 1 \mod 4 \text{ et } n \equiv 2 \mod 3) \iff (n \equiv ??? \mod 12)$$

Exercice 1068 Indication

Que savez-vous de la question suivante : pour quels $d \in \mathbb{Z}$ l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ est-il principal ? factoriel ? euclidien ?

Exercice 1069 Indication

Montrer qu'un idéal non trivial de $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ est premier ssi il est maximal.

Exercice 1070

Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ n'est pas factoriel. De même pour $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$. (Attention ce dernier anneau n'est *pas* l'anneau des entiers d'Eisenstein, qui lui est euclidien.)

Exercice 1071 Indication

Montrer que l'anneau des décimaux est principal. Montrer que $k[X][(X-2)^{-1}]$, l'anneau des fractions rationnelles dont le dénominateur est une puissance de $X-2$, est principal.

Exercice 1072

Montrer qu'un sous-anneau de $\mathbb{Q}$ est principal.

Exercice 1073

Quels sont les entiers de Gauss premiers ?

Exercice 1074

Dans l'anneau des nombres décimaux, trouver un générateur de l'idéal engendré par 21 et $1,4$.

Quel est le pgcd de $0,6$ et $34,8$ dans les décimaux ?

Exercice 1075

Dans $\mathbb{Z}[i]$, quel est le pgcd de $1+3i$ et de $2i$?

Exercice 1076 Indication

Montrer que le théorème de Lie-Kolchin (un sous-groupe connexe et résoluble de $GL_n(\mathbb{C})$ est cotrigonalisable) tombe en défaut pour un groupe non connexe en donnant un contre-exemple.

Exercice 1077 Indication

Montrer que le théorème de Lie (une sous-algèbre de Lie résoluble de $\mathfrak{gl}(V)$ sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle est cotrigonalisable) tombe en défaut en caractéristique $p > 0$.

Exercice 1078 Indication

Montrer que le théorème de Lie-Kolchin (un sous-groupe connexe et résoluble de $GL_n(\mathbb{C})$ est cotrigonalisable) tombe en défaut pour $GL_n(\mathbb{R})$.

Exercice 1079

Montrer que deux matrices circulantes commutent.

Exercice 1080 Indication

Une fonction dérivable avec $f'(a) > 0$ est-elle croissante au voisinage de a ?

Exercice 1081

Si une fonction f admet un DL d'ordre n en 0, peut-on dire qu'elle est n fois dérivable en 0 et que le k-ème terme du DL est donné par $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$?

Exercice 1082

Donner un exemple de forme différentielle fermée et non exacte.

Exercice 1083 Indication

Que peut-on dire d'une matrice M telle que $\forall k \geq 1, \operatorname{Tr}(M^k) = 0$?

Exercice 1084 Indication

Soit G un groupe fini d'ordre n. Si k est un diviseur de n, existe-t-il un sous-groupe $H < G$ d'ordre k ? Que dire sur cette question ?

Exercice 1085 Indication

Que penser de l'affirmation suivante : « si deux matrices A et B dans $M_n(\mathbb{Z})$ sont conjuguées modulo k pour tout k, alors elles sont conjuguées dans $M_n(\mathbb{Z})$ » ? Est-ce facile, difficile, vrai, faux ?

Exercice 1086

On sait que tout groupe fini peut se plonger dans un groupe symétrique S_n. Que dire pour un groupe infini ?

Est-il vrai que tout groupe peut se plonger dans un groupe linéaire $GL_n(K)$, pour un corps K et un entier n adéquat ?

Exercice 1087

Qu'est-ce qui est étonnant dans la loi de réciprocité quadratique ? Expliquer avec des exemples.

Exercice 1088

Donner un exemple de corps de caractéristique p infini, qui ne soit pas $\overline{\mathbb{F}_p}$. Donner également des exemples de corps de caractéristique p algébriquement clos différents de $\overline{\mathbb{F}_p}$.

Exercice 1089 Indication

Soit K un corps, et L une extension algébrique de K. Montrer que

$$\text{Card}\, L \leq \text{Card}\,(K[X] \times \mathbb{N})$$

Exercice 1090 Indication

Soit F un fermé du plan euclidien. On le projette sur une droite : obtient-on un fermé ? Que peut-on dire ?

Exercice 1091

13 est-il somme de deux carrés ? Et 19 ? Et 7000 ? (On demande une réponse relativement rapide, pas forcément la décomposition effective en deux carrés.)

Exercice 1092 Indication

Le théorème des deux carrés de Fermat (prouvé par Euler) dit qu'un nombre premier p est une somme de deux carrés ssi $p \equiv 1 \mod 4$. (On peut en déduire qu'un nombre n est somme de deux carrés ssi ses facteurs premiers congrus à $3 \mod 4$ apparaissent avec multiplicité paire.)

Mais en pratique, comment trouver ces deux carrés ? Par exemple, 193 est un nombre premier somme de deux carrés : lesquels ?

Exercice 1093

Quel est le groupe des unités de l'anneau des entiers de Gauss $\mathbb{Z}[i]$? Et de l'anneau des entiers d'Eisenstein $\mathbb{Z}[(-1+i\sqrt{3})/2]$?

Exercice 1094 Indication

Résoudre sur $\mathbb{N}$ puis sur $\mathbb{Z}$ l'équation $x^2+xy+y^2=19$. Que dire de l'équation diophantienne $x^2+xy+y^2=17$, ou de $x^2+xy+y^2=p$ avec p un nombre premier en général ?

Exercice 1095

Soit $a_0, \dots, a_{n-1}$ des nombres entiers et $x \in \mathbb{Q}$ tel que

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0.$$

Montrer que $x \in \mathbb{Z}$.

Quelle propriété de $\mathbb{Z}$ utilise-t-on ? Comment généraliser ce résultat à d'autres anneaux que $\mathbb{Z}$?

Exercice 1096

Soit $M \in M_n(\mathbb{Z})$ telle que pour tout premier p, la réduction de M modulo p est un projecteur dans $M_n(\mathbb{F}_p)$. Montrer que M est un projecteur.

Exercice 1097

Un théorème affirme qu'une matrice définie positive admet une unique racine carrée définie positive. Rappeler l'idée de preuve puis trouver une matrice 2×2 qui admet une infinité de racines carrées.

Exercice 1098

Calculer $\sum \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^4}$ avec des séries de Fourier.

Exercice 1099

À quoi diriez-vous que servent les séries de Fourier ? Sans développer ni entrer dans les détails, quels exemples marquants viennent en tête ? Citer deux théorèmes, deux contre-exemples, et deux applications.

Exercice 1100 Indication

Citer quelques intégrales célèbres (entre deux et cinq), comme l'intégrale de Gauss (sans les calculer), et dire en quoi elles vous plaisent (applications, techniques de calcul originales...)

Exercice 1101 Indication

Le théorème des deux carrés (énoncé par Fermat, prouvé par Lagrange) décrit les nombres entiers qui sont des sommes de deux carrés.

Par contre, dans $\mathbb{F}_p$, tout élément est une somme de deux carrés. Démontrer ce résultat. Est-ce vrai dans un corps fini en général ? (Rappeler également l'énoncé du théorème des deux carrés pour $\mathbb{Z}$.)

Exercice 1102

Le théorème des deux carrés (énoncé par Fermat et prouvé par Lagrange) décrit les nombres entiers qui sont des sommes de deux carrés. D'autre part, dans un corps fini, on peut montrer que tout élément est somme de deux carrés.

Que sait-on dire pour les sommes de cubes ?

Exercice 1103

Le théorème des deux carrés (énoncé par Fermat, prouvé par Lagrange) décrit les nombres entiers qui sont des sommes de deux carrés.

Dans le cas d'un corps $\mathbb{F}_p$, montrer le résultat suivant : si k divise $p-1$, alors tout élément de $\mathbb{F}_p$ est somme de k puissances k-èmes.

À VERIFIER !

Exercice 1104

Montrer qu'il existe une matrice de $M_2(\mathbb{F}_p)$ qui n'est pas trigonalisable.

Exercice 1105

Trouver toutes les classes de similitude de matrices de $M_2(\mathbb{F}_p)$ tq $\mathrm{Tr}(A) = 2$ et $\det A = 1$.

Est-ce que le commutant (intersecté avec les inversibles) d'une telle matrice est un groupe cyclique ?

Exercice 1106

Donner une matrice qui n'a pas de racine carrée. (Sur tout corps.)

Exercice 1107 Indication

Pour quels k et q le groupe $GL_2(\mathbb{F}_q)$ possède-t-il un sous-groupe isomorphe au groupe cyclique $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$?

(Plus difficile mais intéressant :) Même question avec le groupe diédral d'ordre $2k$ au lieu du groupe cyclique $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$.

Exercice 1108 Indication

Combien y a-t-il de puissances n-èmes dans $\mathbb{F}_q$?
Application : combien y a-t-il de cubes dans $\mathbb{F}_5$? Dans $\mathbb{F}_7$?

Exercice 1109 Indication

Les corps $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ sont-ils isomorphes ?

Exercice 1110 Indication

Les anneaux $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}[X]/(X^2)$ sont-ils isomorphes ?

Exercice 1111

Calculer l'aire d'une ellipse, le volume d'un ellipsoïde.

Exercice 1112

On donne une suite arithmético-géométrique (par exemple par une relation comme $u_{n+1} = 2u_n + 3$ ou bien $u_{n+1} = u_n/2 + 1$, et un terme initial). Converge-t-elle, et si oui vers quoi ?

Exercice 1113

On donne une suite récurrente homographique, par exemple $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2u_n - 1}$. Converge-t-elle, et si oui vers quoi ?

Exercice 1114

On considère trois suites récurrentes avec récurrence linéaire donnée par une matrice 3×3. Comment savoir si les suites convergent ? Expliquer comment étudier la situation.

Exercice 1115

Définir la convergence uniforme. Est-ce que ça a un sens pour des fonctions non bornées ?

Exercice 1116

Que dire de la limite d'une série entière à l'intérieur du disque de convergence ?
Est-ce qu'une série entière converge uniformément sur le disque (ouvert) ?
Donner des exemples.

Exercice 1117

Illustrer les différentes choses qui peuvent se passer au bord du disque de convergence pour une série entière, avec un exemple à chaque fois.

Exercice 1118

Donner les dix développements en série entière classiques : sinus, sinh, arctan, etc. (Premiers termes explicites, et formule pour le terme général.)

Exercice 1119

Discuter l'existence et calculer $\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t} dt$.

Exercice 1120

Quelles méthodes existent pour déterminer le rayon d'une série entière ? Pour chaque méthode, donner un exemple où elle s'applique, et un exemple où elle ne s'applique pas (ou mal).

Exercice 1121

Rayon de convergence de $\sum z^{n^2}$. Variantes avec d'autres séries « lacunaires ».

Exercice 1122

Quelle est la vraie définition du rayon de convergence ? Pourquoi est-ce bien le « rayon de convergence » au sens commun ?

Exercice 1123

Calculer les moments d'une loi normale, en utilisant une interversion d'intégrales.

Exercice 1124 Indication

Soient X et Y deux va indépendantes, uniformes sur $\{1, \dots n\}$. Calculer la loi de l'infimum des deux, et de $|X - Y|$.

Exercice 1125

Décomposer $\frac{1}{x^4+1}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et donner une primitive.

Exercice 1126

Calculer $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx$ par la méthode des résidus, lorsque $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ (même si là avec une primitive ça tombe tout de suite), et pour $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$.

Ensuite, même question pour $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$.

Exercice 1127

La suite $u_n = \int_1^{\infty} e^{-t^n} dt$ admet-elle une limite et si oui laquelle ? Traiter l'exercice avec plusieurs méthodes : en restant dans le programme de L2, puis en se plaçant dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue.

Exercice 1128

La série de fonctions de terme général $\frac{x}{x^2+n^2}$ converge-t-elle et de quelle manière ?

Exercice 1129 Indication

Quelle est l'intégrale de Dirichlet et que vaut-elle ? Expliquez une ou plusieurs méthodes de calcul.

Exercice 1130

Quelle est l'intégrale de Fresnel et que vaut-elle ? Expliquez une ou plusieurs méthodes de calcul.

Exercice 1131 Indication

Comment démontre-t-on la CNS de densité dans les espaces de Hilbert avec la nullité de l'orthogonal ?

Exercice 1132

Redémontrer le théorème de Weierstrass (donner les idées, si possible de plusieurs méthodes différentes).

Exercice 1133

Démontrer la densité des matrices diagonalisables dans $M_n(\mathbb{C})$ de plusieurs façons.

Exercice 1134

Rayon de convergence et somme de $\sum \frac{z^n}{n^2}$

Exercice 1135

Quelle est la norme triple d'une matrice relativement à la norme $\| \|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$? Justifier.

Exercice 1136

Quelle est la norme triple d'une matrice relativement à la norme $\| \|_1$ sur $\mathbb{R}^n$? Justifier.

Exercice 1137

Quelle est la norme triple d'une matrice relativement à la norme $\| \|_2$ sur $\mathbb{R}^n$? Justifier.

Exercice 1138

Densité des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ dans $\mathcal{C}^0$ et $\mathcal{C}^1$?

Exercice 1139

Démontrer Weiestrass polynomial et trigonométrique avec la convolution. Commencer par expliquer quelle approximation de l'unité on choisit.

Exercice 1140

Maximum de la trace sur le groupe orthogonal ?

Exercice 1141

La décomposition de Jordan est-elle vraie sur tout corps, par exemple sur un corps fini ? Donner un énoncé correct sur tout corps.

Exercice 1142

La décomposition de Dunford (ou plutôt Jordan-Chevalley) est-elle vraie sur tout corps, par exemple sur un corps fini ? Donner un énoncé correct sur tout corps.

Exercice 1143

Écrire explicitement un isomorphisme entre le groupe symétrique S_3 et $GL_2(\mathbb{F}_2)$, en précisant l'image de tous les éléments.

Exercice 1144

Dans $M_n(\mathbb{R})$, les conditions de non inversibilité, de non diagonalisabilité ou de nilpotence, sont des conditions de mesure nulle. Que peut-on dire sur un corps fini ?

Exercice 1145 — Indication

Soit $n \geq 2$ un entier et p un nombre premier.

— Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{F}_p[X]$ tel que tout polynôme de degré n divise P.

— En déduire que pour tout matrice $A \in M_n(\mathbb{F}_p)$, $P(A)$ est diagonalisable !

— Sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, le résultat de la questions précédente est-il possible ? (Autrement dit, est-ce qu'il existe un polynôme P tel que $P(A)$ soit diagonalisable pour toute matrice A ?)

Exercice 1146

Soit $\mathbb{F}_q$ un corps fini.

1. Quelle est la probabilité qu'une matrice de $M_n(\mathbb{F}_q)$ soit non inversible ? Que son déterminant soit égal à 1 ? À un élément $a \neq 0$ fixé ?
2. En déduire que la probabilité $p_n(q)$ qu'une matrice soit dans $SL_n(\mathbb{F}_q)$ est inférieure strictement à $1/q$.
3. Montrer que $\lim_{n\to\infty} p_n(q)$ existe. C'est la probabilité qu'une « grande » matrice sur $\mathbb{F}_q$ soit de déterminant un.
4. (Plus difficile) Que savez-vous de la fonction η de Dedekind et la fonction d'Euler (pas l'indicatrice, l'autre, c'est-à-dire le produit infini) ? Sur l'identité d'Euler ? Sur les fonctions modulaires ? Se renseigner.

Exercice 1147 — Indication

Soit k un corps, E un k-ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Il est connu (et cela peut constituer un développement) que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1. Tout sous-espace stable possède un supplémentaire stable.
2. Le polynôme minimal de f est sans facteur carré.

Lorsque ces conditions sont vérifiées, on dit que f est *semi-simple*.

Si $k = \mathbb{R}$, on sait montrer (exercice) qu'être semi-simple est équivalent à être diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Sur d'autres corps, quel est le rapport entre être semi-simple et être diagonalisable sur un surcorps ?

Exercice 1148 Indication

Quelles sont les hypothèses minimales à faire sur un corps k pour que les énoncés suivants, portant sur $P \in k[X]$, soient vrais ?

1. Racines : $(X-\alpha) \mid P \iff P(\alpha) = 0$.
2. Racines simples :
$$\Big((X-\alpha) \mid P \text{ et } (X-\alpha)^2 \nmid P\Big) \iff \Big(P(\alpha) = 0 \text{ et } P'(\alpha) \neq 0\Big)$$
3. Racines multiples :
$$\Big((X-\alpha)^2 \mid P\Big) \iff \Big(P(\alpha) = P'(\alpha) = 0\Big)$$
4. Existence de racines multiples :
$$\Big(\exists \alpha \in k,: (X-\alpha)^2 \mid P\Big) \iff \Big(\mathrm{pgcd}(P, P') \neq 1\Big)$$
5. Racines doubles :
$$\Big((X-\alpha)^2 \mid P \text{ et } (X-\alpha)^3 \nmid P\Big) \iff \Big(P(\alpha) = P'(\alpha) = 0 \text{ et } P''(\alpha) \neq 0\Big)$$
6. Racines d'ordre m :
$$\Big((X-\alpha)^m \mid P \text{ et } (X-\alpha)^{m+1} \nmid P\Big) \iff \Big(P(\alpha) = \cdots = P^{(m-1)} = 0 \text{ et } P^{(m)}(\alpha) \neq 0\Big)$$

Exercice 1149

Comparer les énoncés suivants, portant sur $P \in k[X]$. Sont-elles équivalentes ? Et sous certaines conditions sur le corps k ?

1. P est sans facteurs carrés.
2. P est sans facteur carrés sur $\overline{k}$.
3. Les racines de P sont distinctes.
4. Les racines de P dans $\overline{k}$ sont distinctes.
5. $\mathrm{pgcd}(P, P') = 1$.

Exercice 1150 Indication

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une décomposition $A = D + N$, avec D et N des matrices réelles qui commutent, D diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et N nilpotente. Montrer de plus qu'une telle décomposition est unique et que D et N sont des polynômes en A.

Si l'on remplace $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ par un corps quelconque k et sa clôture algébrique $\overline{k}$, ceci reste-t-il vrai ?

Exercice 1151 Indication

- Redonner l'argument d'unicité pour la décomposition de Dunford lorsqu'elle existe (par exemple sur $\mathbb{C}$).
- On rappelle qu'un endomorphisme est dit semisimple ssi son polynôme minimal est sans facteur carré, ou encore ssi tout sous-espace stable admet un supplémentaire stable. (Ceci est valable sur tout corps.) Montrer que sur un corps quelconque, une décomposition d'un endomorphisme en semisimple plus nilpotent qui commutent n'est pas forcément unique.

Exercice 1152 Indication

Il est connu que sur $\mathbb{F}_q$, la proportion de polynômes irréductibles de degré d est équivalente à $1/d$ lorsque $d \to \infty$ (note : c'est un développement). En particulier, les polynômes irréductibles se raréfient lorsque le degré augmente. Savez-vous si ce phénomène se produit aussi pour des polynômes à plusieurs variables (toujours à coefficients dans $\mathbb{F}_q$) ?

Exercice 1153 Indication

Sur $\mathbb{F}_p$, la proportion de polynômes irréductibles de degré d est calculable explicitement (c'est un développement). Elle est équivalente à $1/d$ lorsque $d \to \infty$. Sans faire ce calcul exact, expliquer de façon élémentaire pourquoi on peut, lorsque $p \geq 3$, minorer la proportion d'unitaires de degré d qui sont irréductibles par $\frac{1}{3d}$ et celle d'irréductibles de degré d en général par $\frac{1}{2d}$.

Exercice 1154 Indication

Dans un groupe fini, les théorèmes de Sylow affirment entre autres que tous les p-Sylow sont conjugués. Trouver un exemple de groupe G avec deux sous-groupes H et H' de même cardinal et non conjugués.

Exercice 1155

Donner quelques exemples de nombres transcendants. Rappeler pourquoi il en existe une infinité. Y a-t-il un nombre réel dont vous connaissez une preuve de transcendance ? Savez-vous si la somme et le produit de deux nombres transcendants l'est également ?

Exercice 1156

1. Si x et y sont des nombres algébriques, montrer que xy et $x+y$ le sont également.
2. Soit x un nombre algébrique, annulé par un polynôme P. Montrer que ix est algébrique en trouvant un polynôme **explicite** qui l'annule.
3. Ce qui précède reste-t-il vrai avec des entiers algébriques à la place de nombres algébriques ?

Exercice 1157 Indication

Soient a et b des nombres algébriques, de polynômes minimaux P et Q. Montrer que $a+b$ et ab sont des nombres algébriques en trouvant des polynômes **explicites** qui les annulent. Traiter l'exemple $a=\sqrt{2}$ et $b=i$ ou d'autres exemples.

Le résultat persiste-t-il pour des entiers algébriques au lieu de nombres algébriques ?

Exercice 1158 Indication

Le théorème de prolongement des caractères affirme que si G est un groupe **abélien** fini et H un sous-groupe, tout caractère $\phi : H \to \mathbb{C}^*$ se prolonge en un caractère de G. Autrement dit, la flèche naturelle de restriction $\widehat{G} \to \widehat{H}$ est surjective.

Montrer que c'est faux pour les groupes finis non abéliens. (Et rappeler la preuve dans le cas abélien, puis pointer l'endroit où cette preuve ne s'applique pas dans le cas non-abélien, soit dans la preuve général, soit sur un groupe concret.)

Exercice 1159 Indication

Peut-on avoir deux éléments $A, B \in M_n(k)$ dont le crochet de Lie vaut l'identité, autrement dit tels que $AB - BA = I_n$?

Exercice 1160

Qu'est-ce que le problème de la duplication du cube ? Que peut-on dire dessus ?

Exercice 1161

Qu'est-ce que le problème de la quadrature du cercle ? Que peut-on dire dessus ?

Exercice 1162

Qu'est-ce que le problème de la trisection de l'angle ? Que peut-on dire dessus ? Donner un exemple d'angle qui n'est pas trisectable.

Exercice 1163

Qu'est-ce que le problème de l'empilement des sphères de Kepler ? Que peut-on dire dessus ?

Exercice 1164

Qu'est-ce qu'un problème isopérimétrique ? Citer quelques problèmes de ce type et leur solution s'ils en admettent une.

Exercice 1165

Quels sont les points du plan qui sont constructibles au compas seul ? Et à la règle seule ? Connaissez-vous des variantes de ces questions ?

Exercice 1166

Pour des parties A, B et C d'un ensemble fini E, le cardinal de leur union est donné par :

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}(A\cup B\cup C) = &\mathrm{Card}(A)+\mathrm{Card}(B)+\mathrm{Card}(C)\\ &-(\mathrm{Card}(A\cap B)+\mathrm{Card}(A\cap C)+\mathrm{Card}(B\cap C))\\ &+\mathrm{Card}(A\cap B\cap C)\end{aligned}$$

Maintenant, désignons par A, B et C des sous-espaces vectoriels d'un k-ev de dimension finie E. Montrer que la formule analogue suivante est **FAUSSE** :

$$\begin{aligned}\dim(A+B+C) = &\dim(A)+\dim(B)+\dim(C)\\ &-(\dim(A\cap B)+\dim(A\cap C)+\dim(B\cap C))\\ &+\dim(A\cap B\cap C)\end{aligned}$$

Où se situent les problèmes (ou au moins certains d'entre eux) ?

Exercice 1167 Indication

Vrai ou faux ? Dans un espace métrique, l'adhérence d'une boule ouverte de rayon r est la boule fermée de rayon r.

Et dans un EVN ?

Exercice 1168 Indication

Vrai ou faux ? Si N est un sous-groupe distingué d'un groupe fini G, de quotient Q, alors G est un produit semi-direct de N par Q.

Exercice 1169 Indication

Soit n et A, B, C et D quatre matrices carrées $n\times n$. L'assertion suivante est-elle vraie ?

$$\det\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix} = \det A\det D - \det C\det B$$

Exercice 1170 Indication

Soit n et A, B, C et D quatre matrices carrées $n\times n$. L'assertion suivante est-elle vraie ?

$$\det\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix} = \det(AD-CB)$$

Exercice 1171 Indication

Soit U un **ouvert** de $\mathbb{R}$ contenant $\mathbb{Q}$. Les assertions suivante sont-elles vraies ?

1. U est égal à $\mathbb{R}$ privé au maximum d'un nombre dénombrable d'irrationnels.
2. U est de mesure (de Lebesgue) pleine.
3. U est de mesure (de Lebesgue) infinie.

Exercice 1172 Indication

Vrai ou faux ? « Un sous-groupe d'un sous-groupe normal de G est normal dans G. »

Exercice 1173 Indication

Vrai ou faux ? « Un sous-groupe normal d'un sous-groupe normal de G est normal dans G. »

Exercice 1174

Charles Hermite a démontré en 1873 que e est transcendant (sur $\mathbb{Q}$). En 1882, Ferdinand von Lindemann a démontré la même chose pour π. En admettant ces résultats, montrer que parmi les deux nombres $e+\pi$ et $e\cdot\pi$,l'un des deux au moins est transcendant. Peut-on généraliser ce résultat ?

(Note : on ne sait toujours pas, en 2018, si l'un de ces deux nombres est algébrique !)

Exercice 1175 Indication

Soit $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists P \in \mathbb{Q}[X], P(z) = 0\}$ l'ensemble des nombres algébriques sur $\mathbb{Q}$. Montrer que A est un corps, et qu'il est algébriquement clos (autrement dit qu'il contient aussi toutes les racines de tous les polynômes de $A[X]$).

Redémontrer ensuite ces résultats mais sans techniques vectorielles.

Exercice 1176

Soit $A \in M_n(\mathbb{Z})$. Que est le lien logique ente les assertions suivantes ?

— A est diagonalisable sur $\mathbb{Q}$ / sur $\mathbb{C}$.

— Il existe / pour presque tout / pour tout p premier, $A \mod p$ est diagonalisable sur $\mathbb{F}_p$ / sur $\overline{\mathbb{F}_p}$.

Exercice 1177

Soit $A \in M_n(\mathbb{Z})$. Que dire de l'ensemble des nombres premiers p tels que $A \mod p$ n'est pas trigonalisable dans $\mathbb{F}_p$?

Exercice 1178

Quel est l'ensemble des nombres premiers p tels que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ne soit pas trigonalisable dans $\mathbb{F}_p$?

Exercice 1179

Le théorème de la progression arithmétique de Dirichlet (1838) affirme que si a et b sont premiers entre eux, il existe une infinité de premiers congrus à a modulo b. Sans utiliser ce théorème, montrer de façon élémentaire qu'il y a une infinité de premiers congrus à 3 modulo 4, ainsi qu'une infinité de premiers congrus à 1 modulo 4 (un peu moins immédiat).

Variations possibles : 2 modulo 3, puis 1 modulo 3 (là aussi, un peu moins immédiat que le précédent).

Peut-on prouver facilement qu'il existe une infinité de premiers congrus à 4 modulo 5 ?

Exercice 1180 Indication

Soit $A \in M_n(\mathbb{F}_q)$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $A^q - A = 0$.

Exercice 1181 Indication

William Burnside a démontré en 1905 qu'un sous-groupe d'exposant fini de $GL_n(\mathbb{C})$ est forcément fini. Montrer qu'un sous-groupe d'exposant fini de $O_n(\mathbb{R})$ est également fini. Connaissez-vous d'autres groupes pour lesquels un résultat de ce type est vrai ?

Exercice 1182

William Burnside a démontré en 1905 qu'un sous-groupe d'exposant fini de $GL_n(\mathbb{C})$ est forcément fini. En étudiant la preuve, montrer que de plus, on a une estimation sur l'ordre du groupe : si l'exposant est N, alors l'ordre est $\leq N^{n^3}$.

Exercice 1183 Indication

Écrire le cosinus et le sinus de $2\pi/5$ à l'aide de radicaux. Ensuite, écrire les cosinus et sinus de tous les angles multiples de $\pi/5$. Finalement, construire un pentagone régulier à la règle et au compas.

(Attention, ce n'est pas pas parce qu'un nombre est exprimable à l'aide de radicaux qu'il est constructible !)

Exercice 1184

(Périodes de Gauss) Soit $\zeta_7 = \exp\left(i\frac{2\pi}{7}\right)$, $A = \zeta_7 + \zeta_7^2 + \zeta_7^4$ et $B = \zeta_7^3 + \zeta_7^5 + \zeta_7^6$.

Calculer $A + B$ et AB, puis en déduire A et B.

Exercice 1185

Soit $n > 0$ et $p \in \mathbb{Z}$. Calculer la somme

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} w^p$$

Exercice 1186 Indication

Montrer que

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_7} \frac{1}{2-\omega} = \frac{448}{127}$$

Exercice 1187

Existe-t-il des encadrements simples de la fonction indicatrice d'Euler $\phi(n)$? Des équivalents, ou des estimations asymptotiques ?

Exercice 1188

Écrire un isomorphisme explicite entre $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ et $((\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*, \times)$. En fait, écrire tous les isomorphismes possibles.

Exercice 1189 Indication

Calculer $\cos(\pi/8)$ et $\cos(\pi/12)$ de plusieurs manières.

Exercice 1190 Indication

Montrer que $\cos(2\pi/7)$ est racine de $8X^3+4X^2-4X-1$. En déduire, en utilisant une méthode de résolution des équations cubiques quelconque, que

$$\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) = \frac{1}{6}\left(-1 + \sqrt[3]{\frac{7}{2} - \frac{21}{2}\sqrt{-3}} + \sqrt[3]{\frac{7}{2} + \frac{21}{2}\sqrt{-3}}\right),$$

où les radicaux désignent les déterminations principales. Discuter l'intérêt pratique ou théorique de cette formule.

Exercice 1191 Indication

Soit G un groupe fini, agissant sur un ensemble fini X de cardinal $n \geq 2$. Montrer que si l'action est 2-transitive, alors G est d'ordre pair.

Exercice 1192

Montrer qu'une fonction de $\mathbb{F}_p$ dans $\mathbb{F}_p$ est... une fonction polynomiale ! (D'un degré que l'on peut majorer a priori.)

Exercice 1193

Indication

Montrer que si 2^n+1 est premier, alors n est une puissance de deux. Les nombres de Fermat sont les entiers de la forme $F_k := 2^{2^k} + 1$. Fermat conjectura qu'ils étaient tous premiers mais Euler finit par démontrer en 1732 que F_5 est divisible par 641. Comment peut-on démontrer ce résultat ?

(Remarque : c'est la seule conjecture erronée de Fermat !)

Exercice 1194

Montrer que si le n-ème nombre de Mersenne $2^n - 1$ est premier, alors n est premier. Connaissez-vous une condition nécessaire et suffisante pour que M_n soit premier ?

Exercice 1195

Soit p un premier impair, ζ_p un racine p-ème primitive de l'unité et $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ le p-ème corps cyclotomique. Est-ce que $\sqrt{p}$ appartient à $\mathbb{Q}(\zeta_p)$? Et $i\sqrt{p}$? De façon générale, quels sont les $\sqrt{n}$, pour $n \in \mathbb{Z}$, qui appartiennent à $\mathbb{Q}(\zeta_p)$?

Exercice 1196

Soit p un premier impair, ζ_p une racine p-ème primitive de l'unité, et a premier avec p. On note $\tau(a)$ la somme de Gauß :

$$\tau(a) = \sum_{k=0}^{p-1} \zeta_p^{ak^2}.$$

1. Pour $p = 7$, calculer toutes les sommes de Gauß, sous forme de somme de racines de l'unité, sans chercher la valeur « exacte » : que constate-t-on ?
2. Montrer que $\tau(a) = \left(\frac{a}{p}\right)\tau(1)$. (Symbole de Legendre)
3. Montrer que $|\tau(a)|^2 = p$.
4. Montrer que $\tau(1)^2 = \left(\frac{-1}{p}\right) p$.
5. En déduire que $\tau(1) = \pm\sqrt{p}$ si $p \equiv 1 \mod 4$ et $\tau(1) = \pm i\sqrt{p}$ si $p \equiv 3 \mod 4$.

En fait les signes sont positifs mais ceci est plus délicat et apparaît lors de la preuve de la réciprocité quadratique.

Exercice 1197 Indication

On considère l'équation $x^2 - 8y^2 = 1$, sur $\mathbb{Z}$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{8}]$ n'est pas factoriel.
2. Trouver rapidement une, puis une infinité de solutions à l'équation.
3. Le faire à un niveau terminale S spé maths (indice : ils n'ont pas d'anneaux en général, mais ils ont les matrices 2×2).
4. (Plus dur) Savez-vous s'il y a d'autres solutions entières ?
5. Illustrer les solutions réelles (tracé à la main, avec petits calculs à faire)
6. Variation : décrire et paramétrer les solutions rationnelles.

Exercice 1198 Indication

Montrer que les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ sont exactement les $(\pm 1 \pm \sqrt{2})^n$, avec $n \in \mathbb{N}$. Dessiner ces éléments.

Exercice 1199 Indication

(Inspiré du bac 2017) On cherche à construire des triangles rectangles « presque isocèles » à côtés entiers, où presque isocèle signifie que les deux côtés sont de mesure x et $x+1$. (Et l'hypoténuse de côté y.) Ceci correspond à l'équation suivante :

$$2x^2 + 2x + 1 = y^2$$

Résoudre le plus possible cette équation.

Exercice 1200 Indication

Généraliser le petit théorème de Fermat à un anneau plus général que $\mathbb{Z}$, par exemple $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$. Quel est l'énoncé ? La preuve ?

Exercice 1201 Indication

Si A est un anneau (commutatif unitaire), on considère

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in A \right\}$$

Montrer que c'est un anneau. Si $A = \mathbb{Z}$, à quoi cet anneau est-il isomorphe (écrire l'isomorphisme) ? Et si $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

Et en remplaçant 3 par un $d \in \mathbb{Z}$ en général ? Écrire les isomorphismes. À quoi correspond le déterminant et la trace de ces matrices, dans ces anneaux ?

Exercice 1202

Quelques sont les éléments premiers / irréductibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$? Et de $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ en général ?

Exercice 1203 Indication

Combien d'éléments inversibles possède l'anneau $\mathbb{F}_p[X]/(X^2-3)$?

Exercice 1204 Indication

Est-ce que $\mathbb{Z}[i]/(p)$ est le corps $\mathbb{F}_{p^2}$? Quels corps finis peuvent être réalisés comme des quotients de $\mathbb{Z}[i]$?

Exercice 1205 Indication

Citer ou trouver quelques triplets pythagoriciens. Proposer des méthodes pour en trouver plus. Y a-t-il une méthode pour les énumérer de façon exhaustive ?

Exercice 1206

Résoudre l'équation diophantienne $4x+5y=2$. Interprétation en termes de $\mathbb{Z}$-modules et d'applications $\mathbb{Z}$-linéaires ?

Exercice 1207

Résoudre l'équation diophantienne $6x+10y+15z=1$.

Exercice 1208 Indication

Illustrer le principe de descente infinie, si possible de plusieurs façons.

Exercice 1209 Indication

Résoudre sur $\mathbb{Z}$ l'équation $x^2+2y^2=9$. Même question pour $x^2+2y^2=6$.

Exercice 1210

De combien de manières peut-on colorier un cube avec six couleurs (une couleur par face) ? Et un octaèdre avec huit couleurs (même condition) ?

Exercice 1211

Est-ce que être irréductible est équivalent à ne pas avoir de racines ?

Exercice 1212

Donner les quatre premiers polynômes cyclotomiques. Montrer que $X^n - 1$ est bien le produit des cyclotomiques.

Exercice 1213 Indication

Peut-il y avoir un nombre fini d'irréductibles dans un anneau du type $k[X]$?

Exercice 1214

1. Décomposer $X^5 - 1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $X^3 + 2X^2 + X - 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.
3. Étudier l'irréductibilité de $X^4 - X^2 + 1$ et de $X^2 - 2$ sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 1215

Factoriser tel ou tel polynôme de degré trois sur $\mathbb{F}_3$. Factoriser $X^4 + 2X^3 + X + 2$ sur $\mathbb{F}_3$.

Exercice 1216

Quel est le pgcd de $X^n - 1$ et $X^m - 1$?

Exercice 1217

Déterminer le polynôme minimal de $\sqrt{2+\sqrt{3}}$, de $\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}$ et de $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 1218 Indication

Décomposer $X^7 - 1$ en irréductibles sur $\mathbb{F}_2$.

Exercice 1219

Montrer que l'élévation à la puissance p dans un anneau de caractéristique p est un morphisme d'anneaux.

Donner un exemple.

Exercice 1220 Indication

Grosso-modo, combien de polynômes irréductibles de degré d y a-t-il sur $\mathbb{F}_q$? Idées pour attaquer cette question ? Si on prend un polynôme au hasard, quelle probabilité a-t-on de tomber sur un polynôme irréductible ? Statistiquement, combien d'essais doit-on faire pour en trouver un ?

Exercice 1221

Appliquer l'algorithme d'Euclide étendu sur un exemple.

Exercice 1222 Indication

Deux nombres de Fermat sont-ils premiers entre eux ?

Exercice 1223 Indication

Donner une matrice symétrique complexe non diagonalisable.

Exercice 1224

Parmi les parallélépipèdes rectangles de surface S, lesquels ont un volume maximal ?

Exercice 1225

Faire un dessin pour illustrer les extrema liés. En pratique, comment maximiser une fonction avec ce théorème ?

Exercice 1226 Indication

Maximum de $f(x, y) := x + y$ sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 = 4\}$? Dessin ?

Exercice 1227 Indication

Le groupe $SO(3)$ est simple mais que dire de $SO(4)$? De $SO(n)$ en général ?

Exercice 1228

En dimension réelle deux, qu'est-ce qu'un endomorphisme normal ?

Exercice 1229

On donne une matrice symétrique réelle 2×2. Quel est le moyen le plus simple de la diagonaliser ? De la diagonaliser en base orthonormée ?

Exercice 1230

Dans un espace euclidien, quels sont les endomorphismes à la fois orthogonaux et symétriques ?

Exercice 1231

Dans un espace euclidien, on considère un projecteur p. Montrer que la projection est orthogonale ssi le projecteur est symétrique.

Exercice 1232

Construire une norme sur $\mathbb{R}^2$ telle que ses seules isométries linéaires soient $\pm\,\mathrm{Id}$.

Exercice 1233

Dessiner tous les axes de rotation d'un cube, d'un tétraèdre.

Exercice 1234

Montrer qu'une isométrie d'un espace affine euclidien est automatiquement affine.

Exercice 1235 Indication

Reconnaître sans calculs, de tête :

$$\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Exercice 1236 Indication

Reconnaître sans calculs, de tête :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 1237

Dans l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$, soit u un vecteur unitaire. Décrire l'application

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto x \wedge u.$$

(Où $\wedge$ désigne le produit vectoriel.)

Exercice 1238 Indication

Reconnaître (avec un peu de calculs mais pas trop)

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Attention au signe de l'angle.

Exercice 1239 Indication

Préciser la fonction qui à un nombre premier p associe le symbole de Legendre $\left(\frac{3}{p}\right)$.

Exercice 1240

Citer des version géométriques de Hahn-Banach (dont une avec des convexes fermés).

Exercice 1241

Qu'est-ce que le déterminant d'une forme quadratique ? ?

Exercice 1242

Le test de primalité des nombres de Mersenne dit que $M_n = 2^n - 1$ est premier ssi $(2 + \sqrt{3})^{2^{n-1}} \equiv -1 \mod M_n$. Est-il utilisable en pratique ?

Énoncer le corollaire avec la suite récurrente de Lucas. Démontrer le corollaire. Quelle est la complexité du test de primalité ? Preuve.

Exercice 1243 Indication

Existe-t-il un test de primalité pour les nombres de Fermat comparable à celui de Lucas-Lehmer pour les nombres de Mersenne ? Est-il plus facile ou plus difficile à démontrer ?

Exercice 1244

Pour l'action de GL par multiplication à gauche, que dire des noyaux de matrices dans la même orbite ? Réciproque ?

Exercice 1245

Soit $K \subseteq L$ une extension de corps. Soient A et B des matrices à coefficients dans K, semblables sur L. Montrer qu'elles sont semblables sur K. (Le cas général est difficile, distinguer des cas particuliers plus faciles : $K = \mathbb{R}$, corps infini...)

Exercice 1246

Quelle est l'action de groupe dans la décomposition polaire ? Que dit la décomposition polaire en termes d'action de groupes, d'orbites, et de représentants privilégiés ?

Exercice 1247

Spécialiser la décomposition polaire dans le cas des matrices de taille 1 (inversibles, ou non inversibles). En particulier, qu'est-ce qu'une matrice 1×1 unitaire ? Hermitienne ? Hermitienne (définie) positive ?

Exercice 1248

La décomposition polaire est-elle un homéomorphisme (de quoi sur quoi) ? Dans le cas des matrices 1×1, qu'est-ce que cela donne ?

Exercice 1249

Unicité de la racine carrée d'une matrice hermitienne positive ? Sous-exo (cas particulier) : montrer qu'il existe une unique matrice hermitienne positive M telle que $M^2 = 3I$. Si l'on enlève la contrainte de positivité, combien de matrices hermitiennes vérifient $M^2 = 3I$? Et combien de matrices en toute généralité ?

Exercice 1250 Indication

Soit $K \subseteq L$ une extension de corps. Soient A et B des matrices à coefficients dans K, équivalentes sur L. Montrer qu'elles sont équivalentes sur K.

Exercice 1251 Indication

Montrer qu'une matrice carrée est non inversible si et seulement si elle est équivalente à une matrice nilpotente.

Exercice 1252

Soit f une fonction de $M_n(k)$ dans k, telle que $f(I_n) \neq 0$, $f(0_n) = 0$, et $f(AB) = f(A)f(B)$. Montrer qu'une matrice M est inversible ssi $f(M) \neq 0$.

Exercice 1253 Indication

Soit A une matrice. Existe-t-il une matrice M telle que $AMA = A$?

Exercice 1254

Pour une forme multilinéaire, être alternée est-il plus ou moins fort qu'être antisymétrique ? Exemples ?

Exercice 1255

Montrer de deux manières que si deux matrices réelles sont semblables sur $\mathbb{C}$, elles sont semblables sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1256

À quoi servent les déterminants classiques qu'on croise partout ? (Vandermonde, Cauchy...)

Exercice 1257

Quelle est l'interprétation géométrique du déterminant ? Alternativement, montrer que dans le plan affine, l'aire orientée (étant fixé un parallélogramme étalon d'aire un) est une forme bilinéaire alternée.

Exercice 1258 Indication

Dans $\mathbb{R}^3$ avec sa norme euclidienne, quelle est la distance entre $(1,1,1)$ et le plan affine passant par $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$? Le mieux serait qu'ici la réponse soit trouvée de tête, mais on peut toujours donner une variante avec d'autres points, et dans ce cas on demande le rapport avec les déterminants (et une réponse utilisant les déterminants).

Exercice 1259 Indication

On considère trois droites affines du plan, d'équation $a_i x + b_i y + c_i = 0$ (pour $i = 1, 2, 3$). À quelle condition sont-elles concourantes ou parallèles ?

Exercice 1260

Donner une équation du plan affine de l'espace passant par $(1,2,3)$, et dirigé par les vecteurs de coordonnées (u_x, u_y, u_z) et (v_x, v_y, v_z). (À l'aide d'un déterminant.)

Exercice 1261

Montrer que toute forme linéaire sur les matrices est de la forme $M \mapsto \operatorname{Tr}(AM)$.

Exercice 1262

Si $S = \exp(T)$, que vaut T ? Est-il unique ? Comment montrer l'existence ?

Exercice 1263 Indication

Montrer que si le polynôme caractéristique de f est irréductible alors ses seuls sous espaces stables sont l'espace tout entier et $\{0\}$.

Exercice 1264

Exemple de décomposition de Dunford, et d'application. Quelle est la question-piège canonique sur la décomposition de Dunford ?

Exercice 1265

Une matrice 3×3 à diagonaliser, rapidement et sans faute.

Exercice 1266

Lien entre déterminant, trace, coefficients du polynôme caractéristique.

Exercice 1267 Indication

On donne une matrice 3×3 a priori générique, mais avec un polynôme caractéristique potable. Calculer la somme des inverses des valeurs propres.

Exercice 1268

Comment calculer un polynôme minimal ? Exemples ?

Exercice 1269

Pourquoi $U_n(\mathbb{R})$ est-il compact ? (Donner les détails.)

Exercice 1270

Idée de preuve du théorème spectral ?

Exercice 1271

Réduire telle forme quadratique (explicite). Quelle est la différence entre la méthode de Gauss et la diagonalisation en BON ?

Exercice 1272 Indication

Que savez-vous de $\zeta(3) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$? Irrationalité, transcendance, nom ... ?

Exercice 1273

Un horloger désire tracer (à la règle et au compas) l'emplacement des minutes sur un cadran d'horloge. Est-ce possible ?

Exercice 1274

Sur $\mathbb{R}$, il est connu que $SO(2)$ est en bijection avec $\mathbb{S}^1$. Rappeler pourquoi. Sur $\mathbb{F}_q$ avec q impair, est-il vrai que $SO(2, \mathbb{F}_q)$ est en bijection avec $\mathbb{S}^1(\mathbb{F}_q) := \{(a,b) \in \mathbb{F}_q^2 \mid a^2 + b^2 = 1\}$? Combien d'éléments possède ce « cercle unité » ?

Exercice 1275

Montrer que $SO(2, \mathbb{F}_q)$ est cyclique si q est impair, et que dans ce cas, $O(2, \mathbb{F}_q)$ est isomorphe à un groupe diédral.

Exercice 1276 Indication

Sur $\mathbb{R}$, on a une bijection $\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 \setminus (-1, 0)$ donnée par $t \mapsto \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$. Rappeler comment voir géométriquement ce paramétrage, qui a l'avantage de se restreindre en une bijection de $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{S}^1(\mathbb{Q}) \setminus (-1, 0)$, l'ensemble des points du cercle (privé d'un point) à coordonnées rationnelles. On se place maintenant sur un corps fini $\mathbb{F}_q$. Que peut-on dire ?

Exercice 1277 Indication

Si q est une puissance d'un premier impair, on considère

$$\theta : \mathbb{F}_q^\times \to \mathbb{F}_q^\times, x \mapsto x^{(q-1)/2}.$$

Montrer $\operatorname{Im}\theta = \{\pm 1\}$ et que le le noyau est l'ensemble des carrés de $\mathbb{F}_q^\times$.

Que se passe-t-il si $q = 2^k$?

Exercice 1278 Indication

Si q est une puissance d'un premier impair. Montrer que 2 est un carré dans $\mathbb{F}_q$ ssi $q \equiv \pm 1 \mod 8$.

Exercice 1279

Soit q une puissance d'un premier impair. Combien de racines huitièmes de l'unité y a-t-il dans $k = \mathbb{F}_q$? Donner le résultat en fonction d'une classe de congruence de q. À quelle condition y a-t-il les huit racines huitièmes ? Montrer qu'un corps du type $\mathbb{F}_{q^2}$ contient toujours huit racines huitièmes.

Exercice 1280

Montrer que $1 + X^2$ est irréductible sur $\mathbb{F}_3$. En déduire une description de $\mathbb{F}_9$. Ce corps possède-t-il des racines primitives huitièmes de l'unité et quelles sont-elles dans la description donnée ?

Exercice 1281 Indication

Que dire de l'application de réduction modulo p des coefficients $SL_n(\mathbb{Z}) \to SL_n(\mathbb{F}_p)$? Est-elle surjective ? Par exemple, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{F}_5)$ a-t-elle des antécédents ?

Exercice 1282 Indication

Montrer que $X^4 + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$, mais réductible sur $\mathbb{F}_p$ pour tout p.

Exercice 1283 Indication

Donner cinq polynômes unitaires irréductibles sur $\mathbb{Q}$. (De degré > 1. Si possible, avec des degrés distincts.)

Exercice 1284 Indication

Sur $\mathbb{F}_2$, combien de polynômes unitaires irréductibles de degré quatre y a-t-il ? Et primitifs ?

Exercice 1285

Soit p un premier. Donner des exemples de polynômes :

1. irréductibles sur $\mathbb{Z}$ mais pas sur $\mathbb{F}_p$;
2. irréductibles sur $\mathbb{F}_p$ mais pas sur $\mathbb{Z}$;
3. irréductibles sur $\mathbb{Z}$ mais pas sur $\mathbb{Q}$;
4. irréductibles sur $\mathbb{Q}$ mais pas sur $\mathbb{Z}$.

Exercice 1286

Soit p un premier. Donner quatre anneaux de cardinal p^2 deux à deux non isomorphes. (Plus dur : montrer qu'il n'y en a pas d'autres, à isomorphisme près.)

Exercice 1287

Soit $p > 3$ un premier. Montrer qu'il existe x tel que $x^2 = -3$ dans $\mathbb{F}_p$ si et seulement si $p \equiv 1 \mod 3$:

1. en utilisant la réciprocité quadratique ;
2. sans l'utiliser.

Exercice 1288 Indication

Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme irréductible. Montrer qu'il n'a pas de racine multiple dans $\mathbb{C}$. Que se passe-t-il si on remplace $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{C}$ par un corps k et sa clôture algébrique $\overline{k}$?

Exercice 1289 Indication

L'équation $x^2 + 15x + 21 = 0$ a-t-elle des solutions dans $\mathbb{F}_{97}$?

Exercice 1290

Sur quels $\mathbb{F}_p$ la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

La diagonaliser dans $\mathbb{F}_5$, puis dans $\mathbb{F}_9$ (expliquer pourquoi c'est possible).

Construire explicitement $\mathbb{F}_9$ et faire tous les calculs : valeurs propres, espaces propres, inverses des matrices de passage etc.

Exercice 1291 Indication

L'équation $x^2 + x + 1 = 0$ a-t-elle des solutions dans $\mathbb{F}_5$ et si oui lesquelles ? Même question avec $\mathbb{F}_7$.

Exercice 1292

Résoudre sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{F}_p$ le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

Exercice 1293

Sur $\mathbb{F}_2$, combien de polynômes unitaires irréductibles de degré six y a-t-il ? On pourra considérer les sous-corps de $\mathbb{F}_{64}$: sont-ils inclus les uns dans les autres ?

Exercice 1294

Sur $\mathbb{F}_2$, calculer de proche en proche le nombre de polynômes irréductibles de degré 1, 2, 3, 4, 5 et 6. Par ailleurs, exhiber ces polynômes.

Exercice 1295

Sur $\mathbb{F}_3$, calculer de proche en proche le nombre de polynômes irréductibles de degré 1, 2, 3, 4, etc.

Exercice 1296

Quel est le plus petit corps contenant $\mathbb{F}_4$ et $\mathbb{F}_8$?

Exercice 1297 Indication

Soit $k = \mathbb{F}_{4096}$. Déterminer tous les sous-corps de k (il y en a cinq) ainsi que les inclusions entre ces sous-corps. Déterminer les degrés sur $\mathbb{F}_2$ des éléments de k (autrement dit les degrés des polynômes minimaux des éléments : ne pas confondre avec les ordres des éléments dans le groupe multiplicatif), ainsi que le nombre d'éléments de chaque degré.

Exercice 1298 Indication

Le résidu, vu comme une application de $\mathbb{C}((t))$ vers $\mathbb{C}$, est-il une application linéaire ? Est-ce un morphisme d'algèbres ? Donner des formules simples pour $\mathrm{Res}(f')$, $\mathrm{Res}(f \cdot g')$, $\mathrm{Res}(f'/f)$ et $\mathrm{Res}((f \circ g) \cdot g')$.

Exercice 1299

Calculer l'expression du gradient, de la divergence, et du laplacien en coordonnées polaires.

Exercice 1300

À quoi sert le lemme de Morse ? S'applique-t-il à beaucoup de fonctions ? (Autrement dit, pour une fonction, est-il courant de n'avoir que des points critiques non dégénérés ?)

Exercice 1301

Calculer l'aire de l'ellipse pleine $x^2 + 4y^2 \leq 4$, d'abord de tête par un raisonnement simple, ensuite à l'aide du changement de variable $x = 2r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ et de la formule avec le jacobien.

Exercice 1302

Calculer le volume de la boule de rayon R de $\mathbb{R}^3$ à l'aide des coordonnées sphériques et de la formule de changement de variable avec le jacobien. En déduire l'aire de la sphère de rayon R.

Exercice 1303

Calculer le volume de la sphère unité R de $\mathbb{R}^3$ à l'aide des coordonnées sphériques, sans passer par le volume de la boule.

Calculer également l'air du tore de révolution de rayons r et R (avec $r < R$) : c'est la surface paramétrée par

$$x = (R + r\cos\phi)\cos\theta; \quad y = (R + r\cos\phi)\sin\theta, \quad z = \sin\phi$$

Exercice 1304

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ≥ 1 et de somme f.

1. Pour $0 < r < 1$, calculer $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^2 \, d\theta$ en fonction de $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et r.
2. On suppose f bornée sur Δ. Montrer que a est de carré sommable. La condition est-elle nécessaire ?

Si possible, proposer plusieurs rédactions, dont une qui n'utilise que des résultats élémentaires (niveau prépa).

Exercice 1305

Montrer que $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{2}$ à l'aide de résidus.

Exercice 1306

Montrer que $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ à l'aide de résidus.

Exercice 1307

Montrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3+\sin t} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Exercice 1308

Développer la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{2-\cos t}$ en série de Fourier.

Exercice 1309

Calculer les intégrales de Wallis $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t\,dt$.

Exercice 1310

Pour f une fonction holomorphe sur le disque unité ouvert $\mathbb{D}$ et $r \in]0,1[$, on note $M(f,r) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(re^{it}|^2 dt$.

1. Exprimer $M(f,r)$ en fonction des coefficients a_n et montrer que $r \mapsto M(f,r)$ est croissante.
2. On note $H^2(\mathbb{D})$ l'ensemble des $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ telles que $\sup\limits_{r<1} M(f,r) < \infty$. Montrer que c'est un espace de Hilbert une fois muni de la norme $||f||_{H^2}^2 = \sup\limits_{r<1} M(f,r)$, isométrique à $\ell^2(\mathbb{N})$ muni de sa norme usuelle.

Exercice 1311

Vrai ou faux :

1. A est diagonalisable ssi A^2 l'est.
2. A est trigonalisable ssi A^2 l'est.

Exercice 1312

Donner un exemple de matrice réelle 3×3 dont le polynôme minimal est :

1. $X-1$
2. $(X-1)^2$
3. $(X-1)^3$
4. $(X-1)(X-2)$
5. $(X-1)(X-2)^2$

Est-il vrai que pour tout polynôme réel de degré ≤ 3, on peut trouver une matrice 3×3 ayant ce polynôme minimal ?

Exercice 1313

Preuve simple que e est irrationnel ?

Exercice 1314

Soit $n > 1$ et P un polynôme à coefficients rationnels de degré $2n+1$ admettant une racine a de multiplicité n. Montrer que P admet une racine rationnelle. Sur un corps autre que $\mathbb{Q}$, le résultat reste-t-il valable ?

Exercice 1315

Soit $n > 0$, et $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $\leq n$. Existe-t-il forcément une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal est P ?

Exercice 1316

Trouver deux matrices A et B telles que

$$\exp(A+B) \neq \exp(A)\exp(B)$$

Exercice 1317

Trouver deux matrices A et B nilpotentes dont la somme n'est pas nilpotente.

Exercice 1318

Trouver deux matrices A et B diagonalisables dont la somme n'est pas diagonalisable.

Exercice 1319

Donner un exemple de polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$ avec deux surcorps K et L distincts et non isomorphes sur lesquels P acquiert une racine. Donner un exemple de polynôme irréductible $P \in \mathbb{Q}[X]$ avec des corps de rupture plongés dans $\mathbb{C}$ distincts (forcément isomorphes, ceux-là).

Exercice 1320

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. À quelle condition existe-t-il un automorphisme de corps de $\mathbb{C}$ qui envoie α sur β ?

Exercice 1321

Le groupe symétrique est-il un produit semi-direct de $\mathfrak{A}_n$ par $\{\pm 1\}$?

Exercice 1322

Soit k un corps, et G l'ensemble des applications de k vers k de la forme $x \mapsto ax + b$, avec $(a, b) \in k^{\times} \times k$. Montrer que G est un groupe : quel est le nom de ce groupe ? L'écrire comme un produit semi-direct de deux groupes simples.

Lorsque $k = \mathbb{F}_3$, à quoi est isomorphe ce groupe ? Écrire un isomorphisme.

Exercice 1323

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, diagonalisables. Montrer que si $A^3 = B^3$, alors $A = B$. Comment généraliser ce résultat ?

Exercice 1324

Soit X une variable de loi géométrique de paramètre p. Calculer $\mathbb{E}(1/X)$.

Exercice 1325

Soit X une variable de loi de Poisson de paramètre λ. Calculer $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X+1}\right)$.

Exercice 1326

Soient X et Y deux variables discrètes de même loi, indépendantes, strictement positives. Montrer que $\mathbb{E}\left(\frac{X}{Y}\right) \geq 1$.

Exercice 1327

Connaissez-vous des probas sur $\mathbb{N}^*$ telles que si p et q sont premiers, les évènements $p\mathbb{N}^*$ et $q\mathbb{N}^*$ sont indépendants ?

Exercice 1328

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On suppose que $f(z)$ n'est jamais réel. Que dire de f ?

Exercice 1329

Soit A une matrice inversible et triangulaire supérieure. Son inverse est-elle triangulaire supérieure ?

Exercice 1330

Très rapidement, pourquoi les polynômes cyclotomiques sont-ils à coefficients entiers ? Quels sont les deux lemmes cruciaux que l'on utilise pour le démontrer ?

Exercice 1331

[141,142,144]

Très rapidement, pourquoi les polynômes cyclotomiques sont-ils irréductibles ?

Exercice 1332

[122]

$\mathbb{Q}$ est un groupe abélien, c'est-à-dire un $\mathbb{Z}$-module. Montrer que ce n'est pas un $\mathbb{Z}$-module libre. Généraliser.

Exercice 1333

[153,154]

Donner deux exemples d'ev E et d'endomorphisme u de E qui n'admet pas de polynôme annulateur (non nul).

Exercice 1334

[153,154]

Soit $A \in M_n(k)$. Quel est le groupe des inversibles de l'algèbre $k[A]$? (Lien avec les inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?)

Exercice 1335

[153,156]

Montrer que l'exponentielle d'une matrice donnée A est un polynôme en A.

Ensuite : comment déterminer un tel polynôme ? Est-ce utile ?

Exercice 1336

[220,221]

Donner un exemple d'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ avec un ensemble de solutions vide.

Exercice 1337

[220,221]

Donner des exemples d'équations différentielles linéaires d'ordre deux homogènes dont l'ensemble de solutions est de dimension 0, 1 et 2.

Exercice 1338

[220,221]

Résoudre l'équation $(e^t - 1)y' + e^t y = 1$, en prenant soin à la justification des arguments de recollement.

Exercice 1339

[220,221]

Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f + f' \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$. Montrer que $f \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

Même question pour une limite l non nécessairement nulle.

Exercice 1340

[213,220,221,234]

Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ telle que $f + f'$ est dans $L^2(\mathbb{R}_+)$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$. Montrer ensuite que $f \xrightarrow[+\infty]{} 0$.

Exercice 1341

[220,221]

Soit $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue non identiquement nulle. Montrer que toute solution de l'équation

$$y''(t) + p(t)y(t) = 0$$

s'annule.

Exercice 1342

[220,221]

Soit $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'une solution non nulle de l'équation

$$y''(t) + p(t)y(t) = 0$$

ne peut pas s'annuler une infinité de fois sur un intervalle borné.

Plus généralement, montrer qu'une solution non nulle d'une ED linéaire homogène (à coefficients non forcément constants) a ses zéros isolés.

Exercice 1343

[213,234]

Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que f et f'' soient dans L^2.

1. Montrer que ff' admet une limite en l'infini, que f' est dans L^2, et que ff' tend vers zéro en l'infini.
2. Montrer que f et f' tendent vers zéro en l'infini.
3. Montrer que

$$\left(\int_{\mathbb{R}} f'^2\right)^2 \leq \int f^2 \int_{\mathbb{R}} f''^2.$$

Exercice 1344

[220,221]

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ obtenue en prolongeant par continuité en zéro la fonction $t \mapsto e^{-1/t^2}$. Montrer que f ne peut être solution sur $\mathbb{R}$ d'aucune équation différentielle homogène $y^{(n)} + ... + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0$ (à coefficients continus).

Exercice 1345

[220,221]

Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 4y = \tan(t)$$

Exercice 1346

[220,221]

Résoudre l'équation différentielle

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{3t}}{1+e^{t}}$$

avec les conditions $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$.

Exercice 1347

[220,221]

Résoudre sur $]-2;1[$ l'équation différentielle

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2t}}{(t-1)(t+2)}$$

Avec les conditions initiales $avecy(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 1348

[220,221,234]

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ continue et considérons l'équation $y'' + f(t)y = 0$.

1. Montrer qu'une solution bornée a une dérivée qui tend vers zéro en $+\infty$.
2. Soient u et v deux solutions. Montrer que leur Wronskien est constant. En déduire que l'équation possède des solutions non bornées.

Exercice 1349

[220,221]

On considère une équation différentielle linéaire $y'' + py' + q = 0$, à coefficients variables. On rappelle que les zéros d'une solution non nulle sont isolés, et que le Wronskien de deux solutions est nul ou bien ne change pas de signe.

Soient f et g deux solutions indépendantes. Montrer qu'entre deux zéros consécutifs de f, la fonction g s'annule (exactement une fois).

Exercice 1350

[220,221]

Résoudre au sens des distributions $y' - \lambda y = \delta_0$.

Exercice 1351

Résoudre au sens des distributions $y'' - 3y' + 2y = \delta_0$.

Exercice 1352

Résoudre au sens des distributions $y'' + \omega^2 y = \delta_0$.

Exercice 1353

[153,155,156]

Expliquer comment calculer rapidement la décomposition de Jordan-Chevalley (alias Dunford) d'une matrice 2×2. Par exemple, quelle est la décomposition $D + N$ de $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$?

Exercice 1354

[226,233]

Expliquer sans calculs, avec un dessin, un cas où la méthode de Newton (pour approximer $f(x) = 0$) ne marche pas.

Exercice 1355

[234]

Soient $p, q \in [1; +\infty]$ conjugués, autrement dit vérifiant $1/p + 1/q = 1$.

1. Montrer l'inégalité de Young : pour tout $a, b \geq 0$ on a
$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$
2. Montrer l'inégalité de Hölder.
3. Que peut-on dire pour p et q non conjugués ?

Exercice 1356

[234]

Soient $p, q \in [1; +\infty]$, et Ω un espace mesuré de mesure finie. Montrer de deux manières différentes que si $p \leq q$, alors $L^q \subset L^p$.

Exercice 1357

[226]

Déterminer (la limite puis) un équivalent de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \arctan(u_n)$.

Exercice 1358

[234]

1. Soient f et g dans L^4. Montrer que fg est dans L^2.
2. Soient maintenant f et g dans L^3. Montrer que $f^2 g$ est intégrable.

Exercice 1359

[224,226]

On considère une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n - 3u_n^2$, positive et convergeant vers zéro. Déterminer un équivalent de cette suite.

Ensuite, pousser le développement asymptotique un cran plus loin.

Exercice 1360

[224,226]

On considère une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$ et convergeant vers zéro. Déterminer un équivalent de cette suite.

Exercice 1361

[224,226]

On considère une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = \arctan(u_n)$. Déterminer un équivalent de cette suite (qui tend vers zéro).

Exercice 1362

Soit M une matrice 2×2 remplie aléatoirement de 1 et -1 (avec loi uniforme). Calculer l'espérance de $(\det M)^2$.

Exercice 1363

Donner des exemples de groupes parfaits (égaux à leur groupe dérivé) de cardinal fini et infini.

Exercice 1364

Prouver que l'espérance du produit de deux variables aléatoires indépendantes est égale au produit des espérances.

Exercice 1365

Interpréter la composition des séries génératrices de manière combinatoire. Proposer un exemple.

Exercice 1366

Soit X une va à valeurs dans $\mathbb{N}$. On lance un arbre aléatoire avec X enfants à chaque nœud (indépendamment), et on note Z_n le nombre d'enfants à la n-ème génération. Quelle est l'espérance de Z_n ?

Bonus : à quelle époque ont vécu Galton et Watson ?

Exercice 1367

Donner un exemple de fonction qui vérifie les hypothèses du théorème d'inversion locale en tout point, mais qui n'est pas bijective.

En quelle dimension est-il possible de construire un tel exemple ?

Exercice 1368 Indication

Sur les équations de transport : résoudre

$$\partial_{tt}u - c\partial_{xx}u = 0$$

Exercice 1369

Sur les équations de transport : résoudre

$$\partial_t u - c\partial_x u = f,$$

avec f une gaussienne centrée en zéro.

Exercice 1370

On se donne une équation différentielle sur $\mathbb{R}$. Est-il possible d'avoir deux solutions y_1 et y_2 arbitrairement proches à $t = 0$, et ayant des limites différentes en $+\infty$? Discuter suivant le type d'équation et illustrer.

Exercice 1371

On considère les deux équations différentielles $(E_1) \quad y' = y^2$ et $(E_2) \quad y' = y^2 + 1$. Discuter d'abord du comportement des solutions, puis résoudre explicitement ces équations.

Exercice 1372 Indication

Soit $t \mapsto y(t)$ une solution de $y' = y^2 - 1$, telle que $y(0) = 0$. Montrer que y est définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1373

Montrer que toutes les solutions maximales de $y' = 1 + \sin(y)$ sont définies sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1374

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et solution d'une équation différentielle $y' = F(y,t)$, avec F continue, et localement Lipschitz en la première variable. Montrer

$$f(t_0) < g(t_0) \implies \forall t \in \mathbb{R}, f(t) < g(t)$$

Exercice 1375

Soit I un intervalle et $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$. Montrer que toute solution non constante de $y' = f(y)$ est strictement monotone.

Exercice 1376

[234,239,250]

La transformée de Fourier sur L^1 est-elle injective ?

Exercice 1377

Donner quelques exemples de résolution d'équations différentielles à l'aide d'une transformée de Fourier.

Exercice 1378

[234]

À propos du lemme de Fatou : donner plusieurs exemples, sur $\mathbb{R}$ ou sur un segment $[-1, 1]$, dans lesquels il faut bien une limite inférieure et non pas une limite.

Exercice 1379

Donner des exemples d'approximations de l'unité de différents types : polynômes, polynômes trigo sur des segments, et au moins deux autres sur $\mathbb{R}$, avec des applications.

Exercice 1380 Indication

Calculer l'exponentielle de $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, puis de $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Exercice 1381

Que peut-on dire de l'exponentielle d'une matrice antisymétrique ?

Exercice 1382

Qu'y a-t-il comme parties compactes intéressantes de $L^2([0, 1])$? À quoi servent-elles ?

Exercice 1383

Donner plusieurs exemples d'opérateurs compacts et non compacts. Applications ?

Exercice 1384

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et ϕ une fonction continue périodique. Les solutions de $y' + \alpha y = \phi$ sont-elles périodiques ? Certaines ?

Exercice 1385

Soit f holomorphe telle que pour tout $n > 0$, on ait $f(1/n) = (-1/n)^3$. Que dire de f ?

Exercice 1386

Soit E un $\mathbb{R}$-evn de dimension finie, et A une partie bornée non vide. Montrer que A est incluse dans une boule fermée $\overline{\mathbb{B}}(a, r)$ de rayon minimal. Le point a est-il unique ?

Exercice 1387

Dans un evn E, peut-on avoir $\mathbb{B}(a, r) = \mathbb{B}(a', r)$ avec $a \neq a'$?

Exercice 1388

Rappeler pourquoi le graphe d'une fonction continue $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est fermé. Réciproquement, si le graphe d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est fermé, la fonction est-elle forcément continue ? Et si f est de plus bornée ?

Exercice 1389

Soit E un evn de dimension finie et F un sous-ev. Montrer que $\overline{F} = F$.

Et si seul F est supposé de dimension finie ?

Exercice 1390

L'opérateur de Volterra V est l'opérateur linéaire qui envoie f sur $Vf : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f$.

Est-il bien défini sur $\mathcal{C}^0([0, 1])$? Quelle est sa norme ? Est-il compact ? A-t-il des valeurs propres, des vecteurs propres ? Quel est son spectre ? Est-il approximable par des opérateurs de rang fini ?

Mêmes questions sur les espaces $L^\infty[0, 1]$, puis $L^p[0, 1]$ avec $p > 1$ (et en particulier $L^2[0, 1]$), puis enfin le plus gros : $L^1[0, 1]$.

Plus difficile : norme de V vu comme opérateur de L^p dans L^q ?

Exercice 1391

Soit $g \in \ell^2$. L'opérateur $\ell^2 \to \ell^2, f \mapsto (g_n f_n)$ est-il continu ? Compact ?

Exercice 1392

On s'intéresse à l'opérateur $T : f \mapsto xf$. Sur $\mathcal{C}^0[0,1]$, est-il continu ? Est-il compact ? Et sur $L^2[0,1]$?

Exercice 1393 Indication

Soit H un espace de Hilbert (de dimension infinie) et ϕ un opérateur compact sur H. Montrer que le spectre de ϕ contient 0.

Exercice 1394

Si un opérateur T est compact, alors T^2 aussi. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 1395

L'opérateur de Hardy H envoie f sur $Hf : x \mapsto \frac{1}{x}\int_0^x f$. Est-il bien défini et borné sur $C^0[0,1]$? Sur $L^p[0,1]$?

Est-il compact sur $C^0[0,1]$? De $C^0[0,1]$ dans $L^2[0,1]$?

Plus difficile : montrer que H est bien défini et borné sur $L^p(\mathbb{R}_+)$, et que sa norme est $q = \frac{p}{p-1}$, l'exposant conjugué. (Inégalité de Hardy.)

Montrer que H n'est pas compact sur $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Exercice 1396

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ une partie sur laquelle toute fonction continue est bornée. (Une telle partie est dite pseudocompacte.)

La partie A est-elle compacte ?

Exercice 1397

Dans $\mathbb{R}$, une suite telle que $u_{n+1} - u_n \to 0$ a des valeurs d'adhérence qui forment un connexe. Redémontrer le résultat et trouver un contre-exemple pour des suites à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 1398

Soit f une fonction holomorphe sur un disque épointé $\mathbb{D}(0,r) \setminus \{0\}$. Rappeler pourquoi, si f est bornée au voisinage de l'origine, alors f se prolonge en une fonction holomorphe à tout le disque (théorème de prolongement de Riemann).

Donner un exemple de fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur le disque épointé, bornée au voisinage de l'origine, qui n'est même pas prolongeable par continuité.

Exercice 1399

Sur le théorème de Brouwer : en dimension deux, quelle est l'idée de la preuve ? Comment illustrer le théorème ? En dimension un, quel résultat classique retrouve-t-on ? Prouver le cas de la dimension un de façon élémentaire.

Exercice 1400 Indication

À quoi servent les opérateurs compacts ?

Exercice 1401

À propos des différents « lemmes de relèvement » que l'on voit souvent : que relève-t-on ? Où ça ? Que signifie « relever » ? Donner différents exemples de relèvements.

Exercice 1402

Soit c_0 l'espace de Banach des suites qui tendent vers zéro, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ et

$$T : \ell^2 \to \ell^2, \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_n a_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Montrer que cet opérateur est bien défini et borné. Montrer qu'il est compact de deux façons : en montrant qu'il est limite d'opérateurs de rang fini, et en vérifiant la définition (image de la boule unité relativement compacte).

Si on remplace l'espace ℓ^2 par l'espace des suites presque nulles (muni de la norme ℓ^2 par exemple), montrer que T est borné, qu'il est limite d'opérateurs de rang fini, mais qu'il n'est pas compact.

Exercice 1403

Proposer des métriques sur $]0,+\infty[$ et sur $]0,1[$ qui les rendent complets mais sans changer la topologie.

L'ensemble $]0,+\infty[$ avec la métrique $\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|$ est-il complet ?

Exercice 1404

Montrer que les ℓ^p sont complets, avec $p \in [1,+\infty]$.

Exercice 1405

Cours : montrer qu'un EVN est complet ssi toute série absolument convergente est convergente.

Exercice 1406

On considère les espaces $\mathcal{C}^n[0,1]$ munis de leur norme naturelle $\|f\|_{\mathcal{C}^n} = \|f\|_\infty + \cdots \|f^{(n)}\|_\infty$. Montrer que l'opérateur de dérivation

$$D : \mathcal{C}^n[0,1] \to \mathcal{C}^0[0,1]$$

est continu, et qu'il est compact ssi $n \geq 2$.

Exercice 1407 [Indication]

Soient α, β des fonctions continues de $[0,1]$ dans $[0,1]$. Montrer que

$$T : f \mapsto \left(x \mapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt \right)$$

est un opérateur borné et compact de $\mathcal{C}^0[0,1]$ dans lui-même.

Exercice 1408 [Indication]

Montrer que $T : f \mapsto \displaystyle\int_0^1 \sin(x^2+y^2)f(y)dy$ est un opérateur (borné et) compact de $L^2[0,1]$ dans lui-même, de plusieurs manières :

— par un argument général sur les opérateurs dans des Hilberts ;
— en montrant que T est à valeurs dans les fonctions continues et que $T : L^2[0,1] \to \mathcal{C}^0[0,1]$ est déjà compact ;
— en montrant que l'opérateur est en fait de rang fini.

Exercice 1409

On considère une équation différentielle d'ordre un définie sur $\mathbb{R}$, homogène, à coefficients variables. On sait que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ forme un ev de dimension ≤ 1. Montrer que l'ensemble des solutions au sens des distributions peut être plus gros. (Et même infiniment plus gros.)

Exercice 1410

Soit $g \in \mathcal{C}^0[0,1]$, et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Résoudre l'équation $y'' = g$ avec les conditions $y(0) = a$ et $y(1) = b$, de façon élémentaire. Si $g \in L^2[0,1]$, comment faire ?

Exercice 1411 [Indication]

Soit $f \in \mathcal{C}^0[0,2\pi]$. Le problème

$$\begin{cases} y'' + y = f \\ y(0) = 0 \text{ et } y(2\pi) = 0, \end{cases}$$

a-t-il toujours une solution ?

Exercice 1412

Sur $M_n(\mathbb{R})$, montrer que $\|M\| := \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}$ est une norme. On l'appelle la norme de Frobenius (ou de Hilbert-Schmidt). En donner une autre expression, plus compacte. Montrer que c'est une norme d'algèbre, autrement dit qu'elle est sous-multiplicative : $\|MN\| \leq \|M\| \cdot \|N\|$. Est-ce une norme d'opérateur ? (=norme subordonnée/triple)

Exercice 1413

Sur $M_n(\mathbb{R})$, montrer que toute norme est proportionnelle à une norme d'algèbre (c'est-à-dire sous-multiplicative).

Exercice 1414

Expliquer sur un exemple pourquoi le théorème des accroissements finis est faux pour des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1415

Soit $H^1[0, 2\pi]$ le sous-espace de $L^2[0, 2\pi]$ des éléments dont le développement en série de Fourier a des coefficients vérifiant

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (1 + n^2)|c_n|^2 \leq \infty.$$

1. Montrer que $H^1[0, 2\pi]$ muni de $\|f\|_{H^1} := \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{Z}} (1 + n^2)|c_n(f)|^2}$ est un espace de Hilbert (espace de Sobolev). Montrer que les polynômes trigonométriques sont denses dedans.
2. Montrer que la condition qui définit l'espace H^1 est équivalente à demander que f soit un élément de L^2 dont la dérivée généralisée soit un élément de L^2. Montrer que la norme définie plus haut est équivalente à $N(f)^2 = \|f\|_{L^2}^2 + \|f'\|_{L^2}^2$.
3. Montrer que les éléments de $H^1[0, 2\pi]$ sont des fonctions continues et $\frac{1}{2}$-hölderiennes.
4. Montrer enfin que l'injection $H^1[0, 2\pi] \subset L^2[0, 2\pi]$ est continue d'image dense, et compacte.
5. Connaissez-vous des exemples d'utilisation concrète de cet espace fonctionnel ?

Exercice 1416

Parmi les équations différentielles classiques, il y a les équations de Bernoulli, de Ricatti, d'Euler, etc. Connaissez-vous des contextes où ces équations apparaissent ? (Par exemple en physique, mais pas forcément.)

Exercice 1417

On considère la suite récurrente $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$. Donner un équivalent de u_n. Si $u_0 = 5$, montrer que l'on a $45 < u_{1000} < 45,1$.

Exercice 1418

Comportement et équivalent de la suite récurrente $u_{n+1} = u_n - e^{-1/u_n}$ (et $u_0 > 0$) ? La convergence est-elle rapide, lente, très lente ?

Exercice 1419

Des personnes ont un chapeau, qu'elles retirent en arrivant dans une salle. En partant, elles reprennent un chapeau au hasard. En moyenne, combien de personnes ont leur chapeau à la fin ? Quelle est la probabilité que personne ne reparte avec son chapeau ?

Exercice 1420 Indication

Combien y a-t-il de sous-ev de dimension k dans $\mathbb{F}_q^n$?

Exercice 1421 Indication

[170]

Quelle est la signature de la forme quadratique $A \mapsto \mathrm{Tr}(A^2)$?

Exercice 1422

Quel est le lien entre l'indicatrice d'Euler et le théorème chinois ?

Exercice 1423

Démontrer le petit théorème de Fermat de plusieurs façons, dont une avec une action de groupe si possible.

Exercice 1424

Expliquer RSA.

Exercice 1425

Démontrer le théorème de Wilson. À quoi sert-il en théorie ? En pratique ?

Exercice 1426 Indication

Combien d'automorphismes le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ possède-t-il ? À quoi est isomorphe $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$?

Exercice 1427

Dans $M_n(\mathbb{R})$, quelle est l'adhérence des matrices diagonalisables ? Sont-elles denses ?

Exercice 1428

On désire calculer π à l'aide de la formule $\frac{\pi}{4} = \arctan(1)$ et du développement en série de l'arctangente. Est-ce une bonne idée ? Combien d'étapes sont nécessaires pour être sûr d'avoir d'avoir une précision de $1/100$?

Autres idées pour calculer des approximations de π ?

Exercice 1429

Quel calcul simple sur des nombres complexes peut aider à démontrer rapidement la formule de John Machin

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) \ ?$$

En utilisant cette formule avec l'approximation la plus naïve de l'arctangente (une étape), quelle marge d'erreur a-t-on pour le calcul de π ? Et avec deux étapes ?

Exercice 1430

On souhaite calculer π à l'aide de la formule $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$. Quelle précision peut-on espérer, au bout de combien d'itérations ? Par exemple, que donne la première approximation ? La deuxième ?

Exercice 1431

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe non constante. Montrer que son image est dense.

Exercice 1432

Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}; \quad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}.$$

Exercice 1433

Calculer $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2n-1}$.

Exercice 1434

Calculer $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n+2}$.

Exercice 1435 Indication

Soit Φ l'application qui à une matrice $M\in M_n(\mathbb{C})$ associe sa partie diagonalisable (le « D » de la décomposition « $D+N$ » de Jordan-Chevalley. Est-ce que Φ est continue ?

Même question sur $M_n(\mathbb{R})$. (Qui est D dans ce contexte ?)

Exercice 1436 Indication

Expliquer comment calculer $\ln(2)$ a l'aide d'une série. À quelle vitesse converge cette série ? Trouver une astuce pour améliorer la convergence, avec la même série entière. En implémentant l'astuce, calculer $\ln(2)$ à $1/10$ près.

Exercice 1437 Indication

Montrer que $L^\infty(\mathbb{R})$ n'est pas séparable.

Exercice 1438

Donner un exemple d'application :

1. non uniformément continue ;
2. uniformément continue mais pas Lipschitz ;
3. bornée mais non uniformément continue.

Exercice 1439

Autour des polynômes de Bernstein :

— On fixe $n\geq 1$ et $k\in [\![0,n]\!]$. Dessiner la fonction

$$P_{n,k}:[0,1]\to\mathbb{R},\ x\mapsto x^k(1-x)^{n-k}$$

Où se trouve son maximum ?

— Dessiner les graphes des premiers polynômes de Bernstein ($n=2$ et $n=3$ disons).

— Expliquer l'air de famille entre, d'une part, l'approximation d'une fonction $f \in \mathcal{C}^0[0,1]$ par des fonctions en escalier comme dans la définition de l'intégrale de Riemann (subdivision régulière de pas $1/n$), et d'autre part l'approximation de f par des sommes pondérées de polynômes de Bernstein comme dans la preuve du théorème de Weierstrass.

— Pour finir : qu'est-ce qu'une partition de l'unité ?

Exercice 1440

Un Hilbert séparable est isométrique à ℓ^2. Expliciter un tel isomorphisme.

Exercice 1441 Indication

Résoudre $2\partial_x f - 3\partial_y f = 0$ en faisant juste un dessin.

Exercice 1442 Indication

Soit $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer de plusieurs manières que $GL_n(k)$ est dense dans $M_n(k)$. Que devient la questions sur d'autres corps et que peut-on dire ?

Exercice 1445

Dans un evn, montrer qu'un hyperplan est soit fermé, soit dense.

Exercice 1446

Dans un evn, montrer que le complémentaire d'un hyperplan dense est connexe par arcs.

Exercice 1447

Montrer la réciproque partielle de Cesàro suivante (« Hardy faible ») : si la moyenne de Cesàro converge vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$ et que de plus $u_{n+1} - u_n = o(1/n)$, alors u_n converge. (Il y a une version forte avec un grand O au lieu d'un petit o.)

Exercice 1448

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exhiber un polynôme de degré n irréductible sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 1449

Illustrer l'utilisation de la formule de Burnside sur la question suivante : combien y a-t-il de façons de colorier un cube avec trois faces noires et trois faces blanches ?

Exercice 1450

Dans la décomposition « $D+N$ » de Jordan-Chevalley, quel est l'énoncé précis d'unicité ? Par exemple, pour qu'il y ait unicité, a-t-on besoin de forcer à priori que D et N soient des polynômes en A, ou bien il y a unicité même sans demander ça ?

Exercice 1451

Est-ce que $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(BAC)$?

Exercice 1452

Qu'est-ce qu'une réflexion, un retournement ? Que savez-vous sur ces transformations ?

Exercice 1453

On sait que A_n est simple pour $n \geq 5$, mais que se passe-t-il pour $n \leq 4$? Décrire ces groupes le plus complètement possible : cardinal, isomorphisme avec d'autres groupes connus, treillis des sous-groupes etc.

Exercice 1454

Sur le produit semi-direct : donner un exemple de produit semi-direct qui ne soit pas un groupe diédral.

Exercice 1455

Sur le produit semi-direct : le groupe $GL_n(k)$ est-il produit semi-direct de $SL_n(k)$ et de $k^\times$? Et produit direct ?

Exercice 1456

À quoi sert le wronskien ? A-t-il une interprétation physique ?

Exercice 1457

Combien y a-t-il de groupes abéliens d'ordre 8 distincts, à isomorphisme près ? Et d'ordre 12 ? 36 ?

Exercice 1458

Montrer que le groupe des automorphismes du groupe de Klein $V_4 = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$.

Exercice 1459

On considère α, β et γ les racines complexes de $X^3 + 2X^2 + 3X + 4$. Calculer $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\gamma}$.

Exercice 1460

On sait qu'une matrice symétrique réelle est diagonalisable et que l'énoncé analogue sur $\mathbb{C}$ est faux. Qu'en est-il sur un corps fini ?

Exercice 1461

Sur les représentations : montrer que le théorème de Maschke tombe en défaut en caractéristique positive. Autrement dit, trouver une représentation avec un sous-espace stable non trivial qui n'admet pas de supplémentaire stable.

Exercice 1462

Sur les représentations : montrer que le théorème de Maschke tombe en défaut en si le groupe n'est plus supposé fini. Autrement dit, trouver une représentation complexe d'un groupe infini admettant un sous-espace stable non trivial sans supplémentaire stable.

Exercice 1463

Sur les représentations : soit V un k-ev, et G un sous-groupe de $GL(V)$. On suppose que V est irréductible pour G, autrement dit qu'il n'y a pas de sous-espaces G-stables non triviaux. Montrer que $\dim G \leq |G|$.

Exercice 1464

Sur les représentations : les caractères sont-ils des morphismes ?

Exercice 1465

Deux groupes non isomorphes peuvent-ils avoir la même table de caractères ?

Exercice 1466

Dresser la table de caractères du groupe diédral D_4.

Exercice 1467

Le groupe $\mathfrak{S}_4$ possède un sous-groupe distingué d'ordre quatre : le groupe des bitranspositions. Il est distingué dans $\mathfrak{S}_4$. À quel groupe connu est isomorphe le quotient ? L'extension est-elle un produit semi-direct ? Un produit direct ?

Exercice 1468

Le groupe des isométries d'un cube possède-t-il des sous-groupes d'ordre huit isomorphes à D_4 ? Combien ? Sont-ils distingués ? Conjugués ?

Exercice 1469

Sur les représentations et le théorème de Maschke : lorsqu'une représentation est somme directe de représentations irréductibles, est-ce qu'il y a unicité de cette décomposition ?

Exercice 1470

Combien y a-t-il de morphismes entre $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$?

Exercice 1471

Soient n et m deux entiers naturels et ϕ l'indicatrice d'Euler. Est-ce que $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$?

Exercice 1472

On considère deux entiers m et n et le morphisme

$$f : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z},\ x \mapsto nx$$

Calculer le noyau et l'image de f. (En particulier, leur cardinal.)

Exercice 1473

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Résoudre dans $M_2(\mathbb{R})$ l'équation $X^2 + X = A$.

Exercice 1474

Déterminer la décomposition $D + N$ des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(Aucun calcul nécessaire, à part la recherche de valeurs propres pour la troisième matrice.)

Exercice 1475

Lorsque l'on voit $\mathfrak{S}_4$ comme le groupe d'isométries du tétraèdre régulier, à quelle isométrie correspond la bitransposition $(12)(34)$?

Et si on voit $\mathfrak{S}_4$ comme le groupe de rotations du cube ?

Exercice 1476

Le groupe $\mathfrak{S}_4$ possède trois représentations de dimension > 1. En donner une interprétation géométrique.

Exercice 1477

Lorsque l'on voit $\mathfrak{S}_4$ comme le groupe d'isométries du tétraèdre régulier, à quelle isométrie correspond le 4-cycle (1234) ?

Exercice 1478

Soient p et q premiers entre eux, et $n = pq$. Que penser de la phrase suivante :

> « Par le théorème chinois, on a $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, et donc $\operatorname{Aut}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \operatorname{Aut}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\times \operatorname{Aut}\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. »

La conclusion est-elle vraie ? Le raisonnement ?

Exercice 1479

Est-ce qu'il y a une décomposition de Jordan sur $\mathbb{R}$? Ou sur un corps quelconque ? Quel serait l'énoncé ?

Exercice 1480

Associer à une matrice carrée réelle son polynôme caractéristique, ou bien son polynôme minimal, est-ce continu ?

Exercice 1481

On fixe ξ un complexe. Sur $\mathbb{C}$, on définit une nouvelle loi

$$z \star w = zw + \xi \operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)$$

Montrer que $(\mathbb{C}, +, \star)$ est un anneau commutatif, dont $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un sous-anneau. On le note $\mathbb{C}_\xi$. Déterminer si et quand $\mathbb{C}_\xi$ est un corps, et si, dans ce cas, il est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Exercice 1482

Soit A une matrice inversible. Montrer que $M \mapsto M^{-1}$ est définie, continue et différentiable au voisinage de A. Peut-on dire plus ?

Exercice 1483

Idée de démonstration du théorème d'inversion locale / des fonctions implicites ?

Exercice 1484

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto e^{xy} + 3x - 2y + 1$. Montrer que la courbe $f = 0$ passe par $(0, 1)$, qu'au voisinage de ce point on peut l'écrire comme le graphe d'une fonction c'est-à-dire $y = g(x)$, et donner le DL d'ordre deux de g en l'origine.

Exercice 1485

Quelle est la différence entre connexe et connexe par arcs ? Donner des exemples et contre-exemples.

Exercice 1486

$GL_n(k)$ est-il engendré par des matrices diagonalisables pour n'importe quel corps ?

Follow-up : traiter l'exemple de $GL_2\mathbb{F}_2$. Trouver une condition nécessaire pour que les diagonalisables puissent engendrer le groupe linéaire.

Exercice 1487

Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Développer $t \mapsto \cos(at)$ en série de Fourier.

Exercice 1488

Montrer que $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

Exercice 1489

Démontrer le principe du maximum (pour les fonctions holomorphes ou harmoniques, en fonction du contexte).

Exercice 1490

Démontrer l'inégalité arithmético-géométrique à l'aide des extrema liés.

Exercice 1491 ——— Indication

Montrer que les représentations linéaires irréductibles d'un groupe abélien fini sont de dimension un. Que peut-on dire pour des groupes abéliens infinis ?

Exercice 1492

L'exponentielle est surjective sur $GL_n(\mathbb{C})$. Que peut-on dire sur $SL_n(\mathbb{C})$? Par exemple, est-ce que

$$\exp : \quad \{M \in M_2(\mathbb{C}) \mid \operatorname{Tr} M = 0\} \longrightarrow SL_n(\mathbb{C})$$

est surjective ?

Exercice 1493

Tout élément de $\mathbb{F}_q$ vérifie $x^q = x$. Est-ce que toute matrice $M \in M_n(\mathbb{F}_q)$ vérifie $M^q = M$? Discuter.

Exercice 1494 ——— Indication

Diagonaliser une matrice, à quoi ça sert ? Donner des exemples de situations où c'est utile et naturel de faire ça.

(Attention, la question n'est pas forcément triviale. Ce qui est demandé avant tout, c'est d'éviter les « mauvaises » réponses.)

Exercice 1495

Les matrices suivantes sont-elles des exponentielles de matrices complexes ? Réelles ? On demande une preuve constructive dans le cas affirmatif.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 1496

Soit $M \in M_2(\mathbb{R})$ de trace nulle, et notons Δ son déterminant.

Montrer que

$$\exp M = \begin{cases} \cosh\sqrt{-\Delta}\, I_2 + \dfrac{\sinh\sqrt{-\Delta}}{\sqrt{-\Delta}} M & \text{si } \Delta < 0 \\ \cos\sqrt{\Delta}\, I_2 + \dfrac{\sin\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}} M & \text{si } \Delta > 0 \end{cases}$$

Et si le déterminant est nul ?

Exercice 1497

À quelle condition sur $\lambda \in \mathbb{R}^*$ la matrice $M = \mathrm{diag}(\lambda, \lambda^{-1}) \in SL_2(\mathbb{R})$ est-elle l'exponentielle d'une matrice réelle de trace nulle ?

Exercice 1498

Étant donné un réel a, calculer l'exponentielle de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 1499

Un sous-monoïde de $(\mathbb{R}_+, +)$ est une partie stable par somme et contenant 0. Est-ce qu'un sous-monoïde est discret ou dense, comme c'est le cas pour les sous-groupes ? Un sous-monoïde est-il l'intersection d'un sous-groupe de $\mathbb{R}$ avec $\mathbb{R}_+$? Et s'il est discret ?

Exercice 1500

Montrer que toute matrice de $M_n(\mathbb{R})$ est somme de deux matrices inversibles. Le résultat est-il vrai sur d'autres corps ? Sur un corps fini ?

Exercice 1501

Comment utiliser les représentations pour démontrer qu'un groupe d'ordre quatre est abélien ? (Sans utiliser le théorème de Cauchy.)

Exercice 1502

Si on démontre qu'il existe des polynômes irréductibles de tout degré sur $\mathbb{F}_p$ en invoquant l'existence de corps finis de cardinal p^d pour tout d, comment justifie-t-on l'existence de tels corps ?

Exercice 1503

Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Connaissez-vous des cas du théorème de Dirichlet que l'on peut prouver de cette manière ? Par exemple, montrer de façon élémentaire qu'il existe une infinité de premiers de la forme $3n + 2$.

Exercice 1504

À propos du théorème de Dirichlet faible : faire la preuve pour le cas particulier $n = 3$, en simplifiant la preuve générale lorsque c'est possible. (Autrement dit montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo 3.)

Exercice 1505

Pour quels $n \in \mathbb{N}^*$ le polynôme $1 + X + \cdots + X^n$ est-il irréductible sur $\mathbb{Q}$?

Exercice 1506

On dispose d'une palette de six couleurs distinctes et on souhaite colorier les faces d'un cube. Combien de coloriages différents (à rotation près) peut-on obtenir

— en imposant d'utiliser toutes les couleurs (donc une face de chaque couleur) ?
— Sans imposer cette contrainte ?

Exercice 1507

Soit p un premier et $r \geq 1$. Le groupe $(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})^\times$ est-il cyclique ?

Exercice 1508

Considérons une isométrie entre la boule unité de $\mathbb{R}^n$ pour la norme 1 et la boule unité de $\mathbb{R}^n$ pour la norme infinie. Montrer que $n = 1$ ou $n = 2$.

Exercice 1509

On munit $\mathbb{R}^2$ d'une multiplication $\star$ qui en fait une $\mathbb{R}$-algèbre. Est-ce que cette $\mathbb{R}$-algèbre est obligatoirement isomorphe à $\mathbb{C}$? Quelles sont les autres possibilités ? Donner des exemples.

Exercice 1510

Que dit le théorème de structure des groupes abéliens finis pour $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$?
Et pour $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$?

Exercice 1511

Combien y a-t-il de groupes abéliens de cardinal 24 ? Et 72 ? (À isomorphisme près bien sûr.)

Exercice 1512

Illustrer l'utilisation de la formule de Burnside sur la question suivante : combien y a-t-il de façons de colorier un octaèdre régulier avec quatre faces noires et quatre faces blanches ?

Exercice 1513

Montrer que dans tout triplet pythagoricien, il y a au moins un multiple de cinq.

Exercice 1514

On considère l'anneau des entiers de Gauss $\mathbb{Z}[i]$, et on quotiente par l'idéal (2). À quoi le quotient est-il isomorphe ?

Exercice 1515

Combien de structures d'anneau différentes peut-on mettre sur le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

Sur un groupe abélien fixé, y a-t-il plusieurs structures d'anneau compatibles ?

Exercice 1516

Combien de diviseurs possède le nombre 360 ?

De façon générale, quel est le nombre de diviseurs de $n \in \mathbb{N}^*$?

Exercice 1517

Combien y a-t-il de façons de colorier un tétraèdre avec (au plus) deux couleurs ? Avec 3 couleurs ?Avec 4 couleurs ? Et avec n couleurs ?

Exercice 1518

Sur le prolongement des caractères : on donne $G = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, $H = 2\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, et $\phi \in \hat{H}$ le caractère de H donné par $\phi([2]) = j$ (avec la convention classique $j = e^{2i\pi/3}$).

Prolonger ϕ à G.

Exercice 1519

Sur le prolongement des caractères : on donne $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $H = \langle(1,1)\rangle$, et $\phi \in \hat{H}$ le caractère de H donné par $\phi((1,1)) = j$ (avec la convention classique $j = e^{2i\pi/3}$).

Prolonger ϕ à G.

Exercice 1520

À propos de Dirichlet faible : pourquoi doit-on introduire des polynômes cyclotomiques, et pourquoi ne peut-on pas simplement adapter la preuve classique d'Euclide, en considérant la quantité $\prod p_i + 1$?

Exercice 1521

Donner un exemple de fonction convexe discontinue.

Exercice 1522

Comment caractériser les fonctions convexes à l'aide de l'épigraphe ?

Exercice 1523

Si une suite de fonctions convexes converge simplement vers f, est-ce que f est convexe ? La convergence est-elle uniforme sur tout compact ?

Exercice 1524

Une fonction monotone a-t-elle des limites à gauche et à droite ? Pourquoi ?

Exercice 1525

Pouvez-vous nous parler de la fonction Γ ?

Exercice 1526

Montrer que l'ensemble des matrices réelles symétriques positives est convexe, et que la fonction à une matrice sa plus grande valeur propre est convexe.

Exercice 1527

Donner la différentielle de $X \mapsto \langle MX, X\rangle$.

Exercice 1528

Un groupe abélien libre n'a pas de torsion. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 1529

On considère le groupe μ_∞ de toutes les racines de l'unité (dans $\mathbb{C}$), avec loi multiplicative. Ce groupe est-il isomorphe à quelque chose de connu ? Comment peut-on le décrire ?

Exercice 1530

Lorsqu'on parle d'homéomorphisme dans la décomposition polaire, de quelle topologie s'agit-il ?

Exercice 1531

Citer quelques applications du théorème spectral.

Exercice 1532

Expliquer pourquoi on peut simultanément diagonaliser deux endomorphismes symétriques réels qui commutent.

Exercice 1533

Montrer l'existence et l'unicité de l'adjoint.

Exercice 1534

Montrer que l'ensemble des matrices symétriques définies positives est ouvert dans l'ensemble des matrices symétriques. Et dans $M_n(\mathbb{R})$?

Expliquer en détail en dimension un et deux.

Exercice 1535

Soit μ_∞ le groupe des racines complexes de l'unité (toutes les racines de l'unité dans $\mathbb{C}$). Peut-on décrire les endomorphismes de ce groupe ?

Exercice 1536 Indication

Que peut-on dire d'une endofonction d'un espace métrique compact, qui de plus préserve les distances ?

Exercice 1537

Une fonction continue périodique est-elle uniformément continue ?

Exercice 1538

Sur un segment, les fonctions polynomiales sont denses dans les fonctions continues. Est-ce vrai sur $\mathbb{R}$? Sinon, quelle est l'adhérence ?

Exercice 1539

Soit $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$. Déterminer son ensemble de définition, étudier la dérivabilité, les limites aux bornes du domaine.

Exercice 1540

Démontrer le lemme de Fatou. Esquisser la preuve de la convergence dominée.

Exercice 1541

Dans $L^1(\mathbb{R})$, résoudre $f \star f = f$.

Exercice 1542

Calculer la transformée de Fourier de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^4}$ via des résidus.

Exercice 1543

Que peut-on dire de la forme quadratique $xy + yz + zx$? (Rang, réduction etc.)

Exercice 1544

Proposer quelques applications du théorème d'Ascoli.

Exercice 1545

Soit K un compact d'un evn et $f : K \to K$ contractante. Montrer qu'il existe un unique point fixe.

Exercice 1546

Soit K un compact d'un evn, et $X = \bigcup_{(x,y)\in K^2} [x, y]$ la réunion de tous les segments joignant des points de K. Montrer que X est compact.

Exercice 1547

Soit (f_n) une suite de fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{C}$, dérivables sur l'intervalle ouvert, qui converge simplement. On suppose que la suite des dérivées est bornée dans L^2. Montrer que (f_n) converge uniformément.

Exercice 1548

À propos de l'exposant d'un groupe. Si G est un groupe abélien d'exposant n, on sait qu'il existe un élément d'ordre n. Démontrer ce résultat. Est-ce vrai pour un groupe non abélien (fini) ?

Exercice 1549

Trouver tous les groupes finis sans automorphismes non triviaux.

Exercice 1550

Sur le prolongement des caractères : où intervient la commutativité du groupe dans la preuve ? A-t-on besoin de l'existence d'un élément dont l'ordre est l'exposant ?

Si G est un groupe fini, non nécessairement abélien, mais qui possède un élément dont l'ordre est exactement l'exposant, peut-on prolonger les caractères des sous-groupes à G ?

Exercice 1551

Sur $[0,1]$, toute fonction continue est limite uniforme de polynômes. Quelle est l'adhérence des polynômes pairs ? Impairs ?

Et avec un autre segment ?

Exercice 1552

Soit $f \in \mathcal{C}^0[0,1]$ avec $f(1) \neq 0$. Trouver un équivalent de $u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)dt$. Et si $f(1) = 0$?

Exercice 1553

Donner un exemple d'ev E avec deux normes, et d'une forme linéaire $\phi \in E^*$ continue pour la première norme et discontinue pour la seconde. (Si possible, donner plusieurs exemples pour E.)

Exercice 1554

Donner un exemple d'un $\mathbb{R}$-ev E et d'un endomorphisme $\phi : E \to E$ qui n'est continu pour aucune norme sur E.

Exercice 1555

Sur $E = \mathbb{R}[X]$, trouver une norme pour laquelle la dérivation est continue, et une autre pour laquelle la dérivation est discontinue.

Exercice 1556

L'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ est-il isomorphe à l'espace des suites réelles ? (Attention, ce n'est pas parce que deux ev vérifient une inclusion stricte, par exemple, qu'ils ne sont pas isomorphes.)

Soit k un corps quelconque. Est-ce que $k[X]$ est isomorphe à l'espace $k^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans k ?

Exercice 1557

Donner deux exemples de matrices 2×2 puis $n \times n$ réelles dont le polynôme minimal est égal à $X^2 + 1$, puis $X^2 + X + 1$.

Exercice 1558

On suppose que le polynôme caractéristique d'une matrice A est égal à $X^4+7X^3-5X^2+X+3$. Quel est le polynôme caractéristique de A^{-1} (et pourquoi A est-elle inversible ?)

Quel est le résultat général ? (Qui est élémentaire mais en fait assez utile)

Exercice 1559

En quoi la formule de Cauchy pour les fonctions holomorphes peut-elle être vue dans certains cas comme une formule de la moyenne ? Commentaires ?

Exercice 1560

Soit E un k-ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Si $k = \mathbb{R}$, montrer que f admet une droite ou un plan stable.
2. Pour un corps général, montrer qu'on ne peut garantir l'existence d'un espace stable non-trivial. Par exemple, donner une matrice $M \in M_3(\mathbb{Q})$ pour laquelle aucun sous-$\mathbb{Q}$-ev de $\mathbb{Q}^3$ n'est stable.

Exercice 1561

Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Dessus, on considère les normes

$$\|f\|_{L^1}, \quad \|f\|_{L^2}, \quad \|f\|_{\mathcal{C}^0} = \|f\|_\infty,$$

$$\|f\|_{H^1} = \sqrt{\int_0^1 |f|^2 + \int_0^1 |f'|^2}, \quad \text{et } \|f\|_{\mathcal{C}^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

Comparer ces normes et montrer avec des contre-exemples qu'elles ne sont pas équivalentes.

Exercice 1562

Une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ peut ne pas posséder de racine carrée, ou en posséder plusieurs. Expliquer pourquoi si M est « proche » de l'identité, on a existence et unicité d'une racine carrée « proche » de l'identité.

Exercice 1563

Déterminer le maximum global de xy^2 sous la contrainte $2x^2 + 3y^2 = 6$, ainsi que les points où il est atteint. Faire un dessin.

Exercice 1564

Déterminer les extrema locaux et globaux de $x^2 + 4y^2$ sous la contrainte $xy = 2$. Proposer deux méthodes, avec les extrema liés ou pas. Faire un dessin.

Exercice 1565

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction polynomiale non constante. Montrer qu'elle est ouverte et fermée. Et si f est polynomiale réelle ? Et pour f holomorphe sur $\mathbb{C}$?

Exercice 1566

Proposer une preuve (ou plusieurs !) du théorème fondamental de l'algèbre s'appuyant sur le cours de fonctions holomorphes.

Exercice 1567

Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert qui contient la boule unité fermée. Montrer que U contient une boule fermée de rayon > 1.

Exercice 1568

Donner des exemples de morphismes de groupe de $\mathbb{C}^*$ vers lui-même, continus et discontinus.

Exercice 1569

Soit u un endomorphisme nilpotent en dimension finie. Quels sont les sous-espaces stables ?

Exercice 1570 Indication

Soit u un endomorphisme cyclique d'un ev de dimension finie. Déterminer tous les sous-espaces stables.

Exercice 1571

Soit K un corps fini. Quelle est la somme de tous les éléments de K ?

Exercice 1572

Donner des exemples de « bosses glissantes » sur $\mathbb{R}$, et sur $]0, 1[$. Ces exemples servent à illustrer quel genre de phénomène ?

Exercice 1573

Les polynômes de Bernstein permettent (parmi d'autres choses) d'approcher uniformément une fonction continue $f \in \mathcal{C}^0[0,1]$ par une suite de polynômes P_n. Savez-vous si la suite $\|f - P_n\|_\infty$ tend rapidement vers zéro ? Y a-t-il d'autres méthodes qui convergent plus vite ?

Exercice 1574

Les polynômes de Bernstein permettent (parmi d'autres choses) d'approcher uniformément une fonction continue $f \in \mathcal{C}^0[0,1]$ par une suite de polynômes P_n.

Si f est plus régulière, par exemple $\mathcal{C}^1$, est-ce que P_n tend vers f pour des topologies plus fines que la norme $\mathcal{C}^0$, par exemple la norme de Sobolev H^1 ou encore la norme $\mathcal{C}^1$?

Exercice 1575

On munit $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$ de la norme $\mathcal{C}^1$, c'est-à-dire $\max\left(\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\right)$. Montrer que les fonctions polynomiales sont denses dans E.

Exercice 1576

Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach et $f : A \to \mathbb{C}$ un morphisme d'algèbres. Montrer que f est continu.

Exercice 1577

Donner un exemple de trois variables aléatoires deux à deux indépendantes, mais non mutuellement indépendantes.

Exercice 1578

Expliquer pourquoi deux variables aléatoires indépendantes X et Y vérifient $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$. Réciproquement, si cette égalité est vérifiée, les variables sont-elles indépendantes ?

Exercice 1579

Expliquer pourquoi lorsqu'on a un couple (X, Y) de variables aléatoires, connaître la loi de X et de Y (les lois marginales) ne permet pas de connaître la loi du couple. Existe-t-il des situations où c'est toutefois vrai ?

Exercice 1580

Comparer les différents modes de convergence d'une suite de variables aléatoires réelles (en loi, en proba, presque sûre, en norme p etc) et donner des contre-exemples pour montrer que ces notions ne sont pas équivalentes.

Exercice 1581

À quoi sert la décomposition en éléments simples, à part calculer des primitives ?

Exercice 1582

Expliquer comment généraliser la décomposition en éléments simples sur $k(X) = \mathrm{Frac}\,(k[X])$ à $\mathbb{Q} = \mathrm{Frac}\,(\mathbb{Z})$. Faire la preuve dans ce cas. À quoi cela peut-il servir ?

Exercice 1583

On sait que la somme de n variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ est une v.a. binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

Réciproquement, soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une v.a. binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, et supposons $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ avec $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ des Bernoulli $\sim \mathcal{B}(p)$. Est-ce que les X_i sont indépendantes ?

Exercice 1584

On sait que la somme de n variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ est une v.a. binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

Réciproquement, soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une v.a. binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Peut-on écrire $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ avec $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ des Bernoulli $\sim \mathcal{B}(p)$ indépendantes ?

Exercice 1585

Soit $E = [\![1,n]\!]$, et soit $A \subseteq E$ une partie de E tirée aléatoirement pour la loi uniforme sur $\mathcal{P}(E)$. Par ailleurs, soient $i \neq j \in E$. Expliquer de plusieurs façons pourquoi les évènements $i \in A$ et $j \in A$ sont indépendants.

Exercice 1586 Indication

Si U est un ouvert de $\mathbb{C}$, l'anneau $\mathcal{O}(U)$ des fonctions holomorphes sur U est-il intègre ?

Exercice 1587

Soient X, Y et Z des variables aléatoires réelles vérifiant $X + Y \sim X + Z$. A-t-on $Y \sim Z$? Et si les variables sont indépendantes et valeurs dans $\mathbb{N}$?

Exercice 1588

Soient X et Y des variables aléatoires. Les assertions « X et Y sont indépendantes » et « X et Y ont covariance nulle » sont-elles équivalentes, lorsqu'elles ont toutes deux un sens ? A-t-on au moins une implication ?

Exercice 1589

Soient X et Y des variables aléatoires. On suppose que X est indépendante en moyenne de Y, c'est-à-dire que

$$\forall y \in Y(\Omega), \mathbb{E}(X|Y = y) = \mathbb{E}X$$

Ceci implique-t-il que les variables sont indépendantes, ou bien décorrélées ? Que dire des implications inverse ?

Exercice 1590

On sait que si X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes, alors pour toute fonction mesurable f, $f(X)$ et $f(Y)$ sont indépendantes. Peut-on remplacer « indépendantes » par « de covariance nulle » ?

Exercice 1591

[META] Faites un dessin qui illustre votre développement.

Exercice 1592

[META] À quoi sert votre développement ? Proposer deux exos d'application très courts, puis deux applications un peu plus longues.

Exercice 1593

[META] En 1m30, décrire la structure de la preuve du développement, les points délicats et l'idée pour les démontrer.

Exercice 1594

[META] Faire tourner la preuve du développement dans un cas très simplifié mais néanmoins éclairant : basse dimension, certaines constantes fixées etc. (Il ne s'agit pas de refaire la preuve en remplaçant « n » par « 2 », mais plutôt d'obtenir une version faible ou un cas particulier qui tienne en 4-5 minutes.)

Exercice 1595

[META] Donner des prolongements possibles du développement proposé, ainsi que le contexte dans lequel il s'insère naturellement.

Exercice 1596

Dans le groupe symétrique S_n, que peut-on dire de deux éléments conjugués ? (Preuve ?)

Exercice 1597

Soient g et h deux éléments conjugués du groupe symétrique S_n. S'ils appartiennent au groupe alterné A_n, sont-ils conjugués dans A_n ?

Exercice 1598

Quels sont les sous-groupes distingués de $GL(n, K)$? (Question difficile. Commencer par citer des sous-groupes distingués, disons quatre lorsque $K = \mathbb{R}$.)

Exercice 1599

Donner un exemple de représentation (non triviale) d'un groupe fini sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension infinie. Donner un exemple de représentation fidèle de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en dimension infinie.

Exercice 1600

Peut-on définir les espaces L^p si $p < 1$? À quel type d'objet mathématique doit-on s'attendre ?

Exercice 1601

Vous avez dit « evt localement convexe »... Connaissez-vous des exemples d'evt non localement convexes ?

Exercice 1602

Qu'est-ce que le procédé diagonal de Cantor ? Donner un énoncé et un exemple d'utilisation.

Exercice 1603

L'espace de Sobolev H^1 a été évoqué. Donner un exemple d'utilisation de cet espace, en détaillant un peu.

Exercice 1604

Quelle est l'interprétation physique de l'identité de Parseval ?

Exercice 1605

Soit H un sous-groupe strict de $(\mathbb{R}, +)$. Montrer que $\mathbb{R} \setminus H$ n'est pas dénombrable.

Exercice 1606

Soit G un groupe infini et H un sous-groupe strict. Montrer que $G \setminus H$ n'est pas fini.

Exercice 1607

Donner plusieurs exemples de sous-groupes denses de $(\mathbb{R}, +)$, dénombrables et indénombrables.

Exercice 1608

Connaissez-vous beaucoup de sous-groupes de $(\mathbb{Q}, +)$? Tous les sous-groupes de $(\mathbb{Q}, +)$?

Exercice 1609

Donner un exemple de série entière qui converge sur tout le cercle d'incertitude sauf en un point. Ensuite, un autre exemple qui converge partout sauf en N points.

Est-il possible qu'une série entière ne converge qu'en un seul point du cercle ?

Exercice 1610

On dit qu'une matrice $M \in M_2(\mathbb{R})$ est « $\mathbb{C}$-linéaire » si l'application $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ induite par l'identification canonique de $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$ est une application $\mathbb{C}$-linéaire. Est-ce que $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est $\mathbb{C}$-linéaire ?

Exercice 1611

Que répondre à quelqu'un ayant lu sur internet que $i^i = e^{-\pi/2}$, en étant (bienveillant et) constructif ? Proposer des réponses à plusieurs niveaux (lycée, L3, M1 par exemple).

Exercice 1612

Sur un ouvert simplement connexe, une fonction holomorphe f qui ne s'annule pas est de la forme e^g, avec g holomorphe. Rappeler pourquoi. Donner un contre-exemple simple lorsque l'ouvert n'est pas simplement connexe.

Exercice 1613

Dans $M_2(\mathbb{F}_2)$, combien de matrices sont diagonalisables ? Et dans $M_2(\mathbb{F}_3)$? Dans $M_2(\mathbb{F}_q)$?

Exercice 1614

Dans $M_2(\mathbb{F}_2)$, combien de matrices sont nilpotentes ? Et dans $M_2(\mathbb{F}_3)$? Dans $M_2(\mathbb{F}_q)$?

Exercice 1615

À quoi cela sert-il de dénombrer les matrices diagonalisables sur $\mathbb{F}_q$, ou nilpotentes, ou le nombre de solutions d'autres équations algébriques ? Est-ce que cela sert dans d'autres théorèmes, y a-t-il des applications ?

Exercice 1616

Citer des exemples de parties denses de L^∞.

Exercice 1617

$L^1(\mathbb{R})$ est-il le dual (topologique) de $L^\infty(\mathbb{R})$? Et $L^\infty(\mathbb{R})$ est-il le dual de $L^1(\mathbb{R})$?

Exercice 1618

L'espace l^1 est-il le dual (topologique) de l^∞ ? Et l^∞ est-il le dual de l^1 ?

Exercice 1619

Soit $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Que peut-on dire de $\mathrm{Conv}(A)$ si A est ouverte ? Fermée ? Compacte ?

Exercice 1620

Soit E un $\mathbb{R}$-evn et E' son dual, c'est-à-dire l'ev des formes linéaires continues sur E, muni de la norme naturelle : la norme d'opérateur. Montrer que E et E' ne sont pas isométriques en général, même en dimension finie.

Exercice 1621

Dans $\mathbb{R}^n$, deux convexes disjoints peuvent être séparés au sens large par un hyperplan. Expliquer pourquoi. Expliquer comment affaiblir légèrement l'hypothèse.

Exercice 1622

Donner un exemple de $\mathbb{C}$-ev non trivial E et d'un endomorphisme de E n'ayant aucune valeur propre.

Exercice 1623

Énoncer le théorème de séparation de Hahn-Banach sous forme géométrique, avec séparation stricte. Expliquer pourquoi on ne peut pas séparer deux convexes fermés au sens strict.

Exercice 1624

Soit E un evn et soient A et B deux convexes disjoints et non vides. Peut-on les séparer au sens large par un hyperplan fermé ?

Exercice 1625

Le théorème de Krein-Milman en dimension finie dit qu'un convexe compact de $\mathbb{R}^n$ est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux. Et si le convexe n'est pas compact ? Par exemple non borné ? Non fermé ? Le théorème se généralise-t-il en dimension infinie ?

Exercice 1626

Un point p d'un convexe $C \subseteq \mathbb{R}^n$ est dit *exposé* s'il existe un hyperplan d'appui H en p tel que $H \cap C = \{p\}$. La notion de point exposé est-elle équivalente à celle de point extrémal ?

Exercice 1627

Expliquer de deux manières pourquoi la boule unité d'un espace eulidien est strictement convexe.

Exercice 1628

Donner un exemple d'espace vectoriel E avec deux normes non équivalentes, l'une plus fine que l'autre.

Exercice 1629

Donner un exemple d'espace vectoriel E avec deux normes dont aucune n'est plus fine que l'autre.

Exercice 1630

On place n points sur le cercle unité de $\mathbb{R}^2$. Montrer que le périmètre du n-gone convexe obtenu est maximal lorsque le polygone est régulier.

Exercice 1631

Le n-ème nombre de Bell B_n est le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments. Calculer B_3 et B_4. Si f et g sont deux fonctions réelles assez dérivables, calculer la dérivée quatrième de $f \circ g$. Connaissez-vous la formule générale ?

Exercice 1632

Le théorème de Cauchy-Lipschitz parle de fonction localement lipschitzienne. Connaissez-vous une fonction localement Lipschitz mais pas Lipschitz ? (Même à une variable.) Et une fonction non localement Lipschitz ?

Exercice 1633

Donner un exemple d'équation différentielle du premier ordre pour laquelle il existe plusieurs solutions sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y(0) = 0$.

Exercice 1634

Étudier les équations différentielles $y' = \sqrt{y}$, $y'^2 = y$ et $y' = \sqrt{|y|}$, en particulier déterminer à chaque fois l'ensemble des solutions vérifiant $y(0) = 0$.

Exercice 1635

Étudier les équations différentielles $y' = \sqrt{1 - y^2}$ et $y'^2 = 1 - y^2$, en particulier déterminer à chaque fois l'ensemble des solutions vérifiant $y(0) = 0$.

Exercice 1636

Exhiber un exemple d'homéo de $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ mais qui n'est pas un $\mathcal{C}^1$-difféo.

Exercice 1637

Expliquer pourquoi la convergence dans L^p n'entraîne pas la convergence presque partout si on ne permet pas d'extraire une sous-suite.

Exercice 1638

Egoroff et Lusin ?

Exercice 1639 Indication

Résoudre $y' + y = H$ au sens des distributions, avec H la fonction de Heaviside, nulle sur les réels négatifs et valant 1 sur les positifs. Quelle situation physique est décrite par cette équation ?

Exercice 1640 Indication

Le théorème de Brouwer affirme qu'une application continue de la boule unité de $\mathbb{R}^n$ dans elle-même possède au moins un point fixe. Trouver un contre-exemple en dimension infinie.

Exercice 1641

Soit ϕ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact et soit f la solution de l'EDO $y' + y = \phi$ qui vérifie $y(t) = 0$ pour $t << 0$. À quoi ressemble f pour $t >> 0$? Calculer f.

Exercice 1642

Dessiner les solutions de $y' = y^3 - y$.

Exercice 1643 Indication

Dessiner l'allure des solutions de $y' = y^2 - x$.

Exercice 1644

Dessiner l'allure des solutions de $y' = y^2 - x^2$.

Exercice 1645

Citer le théorème du point fixe de Picard et montrer que les hypothèses de complétude et de contraction sont nécessaires à l'aide de contre-exemples.

Exercice 1646

[Mini Gronwall] Soit $a \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, et A sa primitive s'annulant en zéro. Soit f une fonction $\mathcal{C}^1$ telle que $f'(t) \leq a(t)f(t)$. Montrer que $f(t) \leq f(0)e^{A(t)}$ pour $t \geq 0$.

Exercice 1647

Dessiner l'allure des solutions de $y' = x/y$ et $y' = -x/y$. Les solutions maximales sont définies sur quel intervalle ?

Exercice 1648

Soit F une fraction rationnelle en T non constante, écrite sous la forme réduite P/Q. Montrer que dans $K(T)$, T est algébrique sur $K(F)$, de polynôme minimal $Q(X)F(T) - P(X) \in K(F)[X]$.

Exercice 1649

Si une matrice carrée à coefficients entiers est diagonalisable sur $\mathbb{Q}$, est-elle forcément diagonalisable sur $\mathbb{Z}$?

Exercice 1650

Soit G un groupe, H et K des sous-groupes distingués de G. Si $H \simeq K$, est-ce que $G/H \simeq G/K$?

Exercice 1651

Soit ϕ un morphisme d'anneaux. montrer que l'image d'un idéal n'est pas forcément un idéal.

Exercice 1652

Connaissez-vous des exemples de groupes qui possèdent des automorphismes non intérieurs ?

Donner un exemple de groupe et d'automorphisme, un exemple explicite (donc pas forcément celui auquel vous étiez en train de penser).

Exercice 1653

Donner un exemple de sous-groupe distingué mais non caractéristique (stable sous tout automorphisme).

Exercice 1654

Donner un exemple de $\mathbb{R}$-ev muni d'un endomorphisme dont tout réel est valeur propre.

Exercice 1655

Donner un exemple de $\mathbb{R}$-ev muni d'un endomorphisme qui n'a aucune valeur propre. Et un $\mathbb{C}$-ev ?

Exercice 1656

On sait que AB et BA ont même polynôme caractéristique. (Reprouver le résultat ?)
Ont-elles le même polynôme minimal ?

Exercice 1657

Connaissez-vous un groupe isomorphe à son groupe d'automorphismes ?

Exercice 1658

Justifier qu'il existe une fonction u telle que pour toute fonction v de carré intégrable et de dérivée de carré intégrable, on ait

$$v(0) = \int uv + \int u'v'$$

Exercice 1659

Vous entendez quelqu'un affirmer que « tout ensemble non vide est un groupe ». Au lieu de chouiner (« ça veut rien dire »), expliquer ce qu'il a vraiment voulu dire, et pourquoi c'est vrai et non trivial.

Exercice 1660

Que peut-on dire de fonctions f et g vérifiant la règle de « dérivation des cancres » $(fg)' = f' \times g'$?

Exercice 1661

Soit k un corps qui vérifie le théorème spectral : toute matrice symétrique à coefficients dans k est diagonalisable. Montrer que -1 n'est pas un carré dans k et que la somme de deux carrés est un carré dans k. En déduire que l'on peut munir k d'une structure de corps ordonné.

Exercice 1662

Montrer que le polynôme $X^3 + 6X^2 + 5X + 25$ est irréductible sur $\mathbb{Z}$.

Exercice 1663

Le polynôme $X^4 - 72X^2 + 4$ est irréductible sur $\mathbb{Z}$. Proposer plusieurs méthodes pour le prouver. (Ce n'est pas grave si ça ne marche pas.)

Exercice 1664

Soit P un polynôme entier unitaire de degré quatre. Comment peut-on utiliser la factorisation en irréductibles sur $\mathbb{R}$ pour avoir une condition suffisante d'irréductibilité sur $\mathbb{Q}$?

Exercice 1665

Sur un corps fini K de caractéristique p, on fait agir le Frobenius $z \mapsto z^p$. Que dire des orbites (nombre, cardinal, autres commentaires) ?

Que peut-on en déduire rapidement sur, par exemple, la signature du Frobenius sur $\mathbb{F}_4$? $\mathbb{F}_8$? $\mathbb{F}_{16}$? (Plus dur :) $\mathbb{F}_{64}$?

Exercice 1666

On veut calculer a^{300} modulo N. Expliquer comment faire ceci rapidement en utilisant l'exponentiation rapide, par exemple pour $a = 3$ et $N = 500$ (exemple au hasard).

Exercice 1667

Soit $L = \mathbb{F}_q$ un corps fini de caractéristique p, avec $q = p^n$. On note F le Frobenius, et $K = \mathbb{F}_p$.

Rappeler pourquoi F est un automorphisme K-linéaire, d'ordre n. Montrer qu'il existe un élément $x \in L$ tel que $(x, F(x), \cdots F^{n-1}(x))$ soit une K-base (dite « base normale ») de L.

Exercice 1668

Résoudre $x^3 = a$ dans $\mathbb{F}_7$.

Exercice 1669

Résoudre $x^4 = a$ dans $\mathbb{F}_7$.

Exercice 1670

Montrer qu'un groupe abélien fini est cyclique si et seulement si tous ses groupes de n-torsion sont cycliques.

Et si le groupe est infini ?

Exercice 1671

Il est connu que $\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$.

Proposer plusieurs démonstrations de ce fait, avec ou sans marteau-pilon. (Attention avec les séries entières.)

Exercice 1672

Que répondre à quelqu'un ayant lu sur internet que la somme des entiers naturels valait $-1/12$, en étant (bienveillant et) constructif ? Proposer des réponses à plusieurs niveaux (lycée, L3, M1 par exemple).

Exercice 1673

Sur le corps fini $\mathbb{F}_q$ de caractéristique p, on fait agir le Frobenius $z \mapsto z^p$, qui est bijectif. Quel est le stabilisateur d'un élément $x \in \mathbb{F}_q$?

Exercice 1674

Soit f une série entière de rayon infini, telle que $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) \notin \mathbb{R}_+$. Que dire de f ?

Exercice 1675

Soit f holomorphe sur le disque unité ouvert, qui tend vers zéro en tout point du cercle unité. Que dire de f ?

Exercice 1676

Soit f une série entière de rayon 1. Est-ce que $|f|$ peut tendre vers $+\infty$ en tout point du cercle unité ?

Exercice 1677

Soient f et g deux séries entières de rayon infini, avec partout $|f| < |g|$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $f = \lambda g$.

Exercice 1678

Soit f une série entière de rayon infini, telle que $|z| \to +\infty \implies |f(z)| \to +\infty$. Que dire de f ?

Exercice 1679

Soit f une série entière de rayon infini, dont la partie réelle est bornée. Que dire de f ?

Exercice 1680

Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}$ harmonique. Est-ce la partie réelle d'une fonction holomorphe $f : U \to \mathbb{C}$?

Exercice 1681

Soit $f \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que si la fonction polynomiale associée, toujours notée $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, est bijective, alors f est de degré un.

Et si f est une série entière de rayon infini, au lieu d'un polynôme ?

Exercice 1682

Calculer l'intégrale de Fresnel $\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,dt$ en intégrant la fonction holomorphe $z \mapsto e^{iz^2}$ sur le bord du compact $K_R := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Arg}(z) \leq \pi/4 \text{ et } |z| \leq R\}$.

Exercice 1683

Il est connu que l'exponentielle matricielle complexe est surjective (sur GL). Comment faire pour trouver un logarithme de $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$? (C'est-à-dire une matrice dont l'exponentielle vaut A ?) Et pour $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$?

Exercice 1684

On se donne une suite $(z_n)_n$ de nombres complexes distincts, et $(\alpha_n)_n$ une suite de complexes. Existe-t-il une fonction méromorphe f sur $\mathbb{C}$ qui a des pôles exactement aux z_n, avec un résidu égal à α_n ? Connaissez-vous des variations de ce théorème ?

Exercice 1685

Sur $\mathbb{F}_2$, combien y a-t-il de polynômes unitaires irréductibles de degré deux ? Trois ? Quatre ? (« La suite va vous surprendre. »)

Exercice 1686

On considère le Frobenius sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ de caractéristique p. Est-ce un endomorphisme diagonalisable ? (Sur $\mathbb{F}_p$? $\mathbb{F}_q$? $\overline{\mathbb{F}_p}$?)

2 Indications

Indication pour l'exercice 1000 Retour à l'énoncé 1000

Utiliser la classification des sous-groupes de $\mathbb{R}$. Les deux cas de figure passent-ils au quotient (i.e. l'image d'un sous-groupe non dense est-il non dense ?)

Indication pour l'exercice 1001 Retour à l'énoncé 1001

Exo du Francinou, qui peut d'ailleurs servir de développement : les tels morphismes sont de la forme $[t]_{2\pi} \mapsto \exp(tA)$ avec des conditions sur A. Il y a aussi la version pour $GL_n(\mathbb{R})$.

Indication pour l'exercice 1002 Retour à l'énoncé 1002

Décomposition polaire d'un complexe, qui se généralise en la décomposition polaire des matrices.

Indication pour l'exercice 1003 Retour à l'énoncé 1003

Si $\theta \in]-\pi,\pi[$ est utilisé pour le paramétrage standard, paramétrer plutôt par $t = \tan(\theta/2)$. Penser aux formules de trigo que l'on utilise pour les calculs d'intégrales.

Indication pour l'exercice 1006 Retour à l'énoncé 1006

Prendre le premier (=le plus petit) exemple de groupe avec un sous-groupe non distingué, faire les calculs (décrire les classes etc).

Indication pour l'exercice 1007 Retour à l'énoncé 1007

Oui. Chercher dans les groupes de petit cardinal.

Indication pour l'exercice 1010 Retour à l'énoncé 1010

Regarder en petite dimension

Indication pour l'exercice 1026 Retour à l'énoncé 1026

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est abélien.

Indication pour l'exercice 1027 Retour à l'énoncé 1027

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est abélien.

Indication pour l'exercice 1031 Retour à l'énoncé 1031

Rappel : l'extension est un produit semi-direct si et seulement si la surjection admet une section. Dans ce cas le produit semi-direct est direct ssi l'image de cette section est un sous-groupe distingué.

Indication pour l'exercice 1039 Retour à l'énoncé 1039

À priori, on agit sur des couples de diagonales. C'est en fait l'opération sur les paires de faces opposées du cube (deux paires de diagonales déterminent deux faces opposées. Le morphisme est surjectif.

Indication pour l'exercice 1043 Retour à l'énoncé 1043

On chercher un paramétrage avec des cosinus et sinus, et des cosinus et sinius hyperboliques. Voir Mneimé-Testard.

Indication pour l'exercice 1048 ——— Retour à l'énoncé 1048
Sur un corps (infini) de caractéristique p, on voit que le groupe G des matrices carrées de taille p, triangulaires supérieures et avec des 1 sur la diagonale, est un groupe infini, dont tous les éléments sont d'ordre p.

Indication pour l'exercice 1056 ——— Retour à l'énoncé 1056
Quelle est la trace d'une matrice de permutation ?

Indication pour l'exercice 1059 ——— Retour à l'énoncé 1059
Et si n est premier ? Une puissance de premier ?

Indication pour l'exercice 1065 ——— Retour à l'énoncé 1065
Dans un anneau principal, un idéal premier est maximal (exercice), et donc ...

Indication pour l'exercice 1068 ——— Retour à l'énoncé 1068
Question générale, et ouverte. D'ailleurs en général la question est posée pour l'anneau d'entiers de $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$, plutôt que $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

Il faut connaître quelques exemples et contre-exemples et savoir que la question générale est ouverte, voir les autres exercices.

Indication pour l'exercice 1069 ——— Retour à l'énoncé 1069
Un anneau intègre fini est un corps.

Indication pour l'exercice 1071 ——— Retour à l'énoncé 1071
En quelque sorte, c'est deux fois la même question.

Indication pour l'exercice 1076 ——— Retour à l'énoncé 1076
Prendre un petit groupe fini de matrices.

Indication pour l'exercice 1077 ——— Retour à l'énoncé 1077
Même avec une algèbre nilpotente c'est faux. Considérer une algèbre d'opérateurs différentiels agissant sur des polynômes.

Indication pour l'exercice 1078 ——— Retour à l'énoncé 1078
Chercher en dimension deux, partir d'une matrice non trigonalisable, par exemple.

Indication pour l'exercice 1080 ——— Retour à l'énoncé 1080
Non.

Indication pour l'exercice 1083 ——— Retour à l'énoncé 1083
Attention à la caractéristique du corps !

Indication pour l'exercice 1084 ——— Retour à l'énoncé 1084
Non.

Indication pour l'exercice 1085 Retour à l'énoncé 1085
Il semble que ce soit faux. Un contre-exemple est :

$$A = \begin{pmatrix} 17 \times 11 + 1 & 25 \times 11 \\ 11^2 & 16 \times 11 + 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 17 \times 11 + 1 & 11 \\ 25 \times 11^2 & 16 \times 11 + 1 \end{pmatrix}$$

Référence : Stebe, Conjugacy separability of groups of integer matrices. Proc. Amer. Math. Soc., 32 :1–7, 1972. Lire l'article pour comprendre et vérifier.

Indication pour l'exercice 1089 Retour à l'énoncé 1089
Considérer l'ensemble

$$\Gamma = \{(P, x) \in (K[X] \setminus 0) \times A \quad | \quad P(x) = 0\}$$

Indication pour l'exercice 1090 Retour à l'énoncé 1090
Que dire si le fermé est de plus borné ?

Indication pour l'exercice 1092 Retour à l'énoncé 1092

La solution évidente est de tester tous les carrés jusqu'à $p/2$. Pour 193, on voit que c'est $7^2 + 12^2$. Mais on demande s'il n'y a pas une réponse plus théorique, et la discussion de l'efficacité entre réponse théorique et la force brute.

Indication pour l'exercice 1094 Retour à l'énoncé 1094

Sur $\mathbb{N}$ la force brute ou quelques raffinements donnent la solution $(2, 3)$. Pour les solutions sur $\mathbb{Z}$, l'équation équivaut à $(x - jy)(x - j^2y) = 19$.

La deuxième équation n'a pas de solution. En général, cela dépend de la classe de p modulo 3.

Indication pour l'exercice 1100 Retour à l'énoncé 1100
Gauss, Fresnel, Dirichlet, intégrales de Fourier, Wallis, fonction Gamma...

Écrire ces intégrales et donner rapidement les idées de calcul.

Voir `https://en.wikipedia.org/wiki/Lists_of_integrals#Definite_integrals_lacking_closed-form_antiderivatives`

Indication pour l'exercice 1101 Retour à l'énoncé 1101
Faire à part le cas de caractéristique deux.

Si la caractéristique est ≥ 3, combien d'éléments de K sont des carrés ?

Indication pour l'exercice 1107 Retour à l'énoncé 1107
Commencer par donner une condition nécessaire simple sur k et q pour que ce soit possible.

Indication pour l'exercice 1108 Retour à l'énoncé 1108
Combien de racines n-èmes y a-t-il ?

Indication pour l'exercice 1109 Retour à l'énoncé 1109
Non.

Indication pour l'exercice 1110 Retour à l'énoncé 1110
Non.

Indication pour l'exercice 1124 Retour à l'énoncé 1124

Extrema liés.

Indication pour l'exercice 1129 Retour à l'énoncé 1129

L'intégrale de Dirichlet est $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(x)}{x} dx$. On peut la calculer par exemple avec des résidus, en introduisant la fonction méromorphe $z \mapsto e^{iz}/z$, mais il y a d'autres méthodes.

Indication pour l'exercice 1131 Retour à l'énoncé 1131

Grâce au théorème de projection.

Indication pour l'exercice 1145 Retour à l'énoncé 1145

Considérer

$$P = \prod_{i=m}^{n} (X^{p^m} - X)$$

Pour la dernière question, la réponse est non.

Indication pour l'exercice 1147 Retour à l'énoncé 1147

Être diagonalisable sur un surcorps est plus fort qu'être semi-simple, et si le corps est parfait, c'est équivalent. Trouver un contre-exemple sur un corps non parfait.

Indication pour l'exercice 1148 Retour à l'énoncé 1148

Les deux premières sont toujours vraies, les autres non. Refaire les preuves (faciles) pour comprendre ce qui est important.

Indication pour l'exercice 1150 Retour à l'énoncé 1150

Remarquer que $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid \bar{z} = z\}$. Quel est l'analogue de cette remarque pour un corps fini ? Pour une extension de corps quelconque ?

Indication pour l'exercice 1151 Retour à l'énoncé 1151

Sur un corps parfait, la décomposition est unique (et existe), comme on le voit en passant à la clôture algébrique et en utilisant que sur un corps parfait, être semisimple équivaut à être diagonalisable sur la clôture algébrique.

Pour un contre-exemple, il faut donc prendre un corps non parfait, par exemple $\mathbb{F}_2(T)$.

Indication pour l'exercice 1152 Retour à l'énoncé 1152

Avec des polynômes à plusieurs variables, c'est le contraire qui se produit, la proportion d'irréductibles tend vers 1.

Indication pour l'exercice 1153 Retour à l'énoncé 1153

Minorer le nombre d'éléments primitifs de $\mathbb{F}_{p^d}$. Pour cela, considérer les sous-corps de $\mathbb{F}_{p^d}$.

Indication pour l'exercice 1154 Retour à l'énoncé 1154

Commencer par trouver G le plus petit possible. Puis trouver des exemples d'une nature différente.

Indication pour l'exercice 1157 Retour à l'énoncé 1157

Penser au résultant.

Indication pour l'exercice 1158 ——— Retour à l'énoncé 1158

Une condition nécessaire pour qu'une flèche soit surjective est que les cardinaux décroissent, par exemple.

Indication pour l'exercice 1159 ——— Retour à l'énoncé 1159

Attention à la caractéristique du corps !

Indication pour l'exercice 1167 ——— Retour à l'énoncé 1167

Faux, même sans utiliser le contre-exemple $r = 0$.

Indication pour l'exercice 1168 ——— Retour à l'énoncé 1168

Faux.

Indication pour l'exercice 1169 ——— Retour à l'énoncé 1169

L'assertion est fausse en général.

Indication pour l'exercice 1170 ——— Retour à l'énoncé 1170

L'assertion est fausse en général.

Indication pour l'exercice 1171 ——— Retour à l'énoncé 1171

Faux, faux et faux. Indication : « $\mathbb{Q}$ est petit, et d'autre part un ouvert peut être bizarre ».

Indication pour l'exercice 1172 ——— Retour à l'énoncé 1172

C'est trivialement faux parce que le sous-groupe normal intermédiaire pourrait être égal à G lui-même. Mais même avec un sous-groupe normal strict de G, c'est quand même faux.

Indication pour l'exercice 1173 ——— Retour à l'énoncé 1173

Faux. Chercher dans S_4. (Penser aux rotations du cube, éventuellement.)

Indication pour l'exercice 1175 ——— Retour à l'énoncé 1175

Se ramener à des extensions finies et utiliser les techniques vectorielles.

Indication pour l'exercice 1180 ——— Retour à l'énoncé 1180

Une matrice est diagonalisable si et seulement si ... ?

Indication pour l'exercice 1181 ——— Retour à l'énoncé 1181

Premier réflexe : réduire en base orthonormée, ne serait-ce que pour voir.

Indication pour l'exercice 1183 ——— Retour à l'énoncé 1183

On doit trouver $\cos(2\pi/5) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ puis la table de valeurs suivantes :

θ	$\pi/5$	$2\pi/5$	$3\pi/5$	$4\pi/5$
cos	$\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$	$\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$

On trouve les sinus à l'aide des formules de trigonométrie. Par exemple, $\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{\dfrac{5}{8} + \dfrac{\sqrt{5}}{8}}$.

Indication pour l'exercice 1186 ——— Retour à l'énoncé 1186

Effectuer la division euclidienne de X^7-1 par $X-2$.

Indication pour l'exercice 1189 ——— Retour à l'énoncé 1189

Pour $\frac{\pi}{12}$, on peut utiliser $\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\frac{\pi}{6}$, ou bien $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$.

Indication pour l'exercice 1190 ——— Retour à l'énoncé 1190

Comme pour le pentagone régulier, utiliser toutes les racines de l'unité. En notant $\zeta=e^{2i\pi/7}$, poser

$$\begin{aligned}\alpha &= \zeta+\zeta^6\\ \beta &= \zeta^2+\zeta^5\\ \gamma &= \zeta^3+\zeta^4\end{aligned}$$

Pour obtenir la formule par radicaux, on peut par exemple utiliser la technique de Cardan-Tartaglia, ou de Lagrange.

Autres formules et discussion sur la théorie de Galois ici : `http://www.madore.org/~david/weblog/d.2012-03-09.2015.html`

Indication pour l'exercice 1191 ——— Retour à l'énoncé 1191

Montrer que G est en fait divisible par $n(n-1)$.

Indication pour l'exercice 1193 ——— Retour à l'énoncé 1193

On peut écrire $n=a2^b$, avec a et b impairs. Alors, en posant $c=2^{2^b}$, on a

$$1+2^n=\dots$$

Indication pour l'exercice 1197 ——— Retour à l'énoncé 1197

Il suffit aussi de montrer que l'anneau n'est pas intégralement clos.

Pour le dessin, il faut tracer une hyperbole, à la main. Calculer et tracer les asymptotes.

Pour les points rationnels, penser aux points rationnels du cercle.

Indication pour l'exercice 1198 ——— Retour à l'énoncé 1198

Il y a un lien avec l'exercice suivant : montrer que les solutions de $y'+ay=0$ sont exactement les $t\mapsto\lambda e^{-at}$.

(Pour le dessin, on demande bien sûr un dessin dans le plongement canonique de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ non pas dans $\mathbb{R}$ mais dans $\mathbb{R}^2$.)

Indication pour l'exercice 1199 ——— Retour à l'énoncé 1199

Faire un changement de variable pour se ramener à une équation plus simple.

Indication pour l'exercice 1200 ——— Retour à l'énoncé 1200

L'énoncé est $a^N\equiv a \mod p$, avec un certain N qui est différent de p : examiner la preuve pour comprendre quel nombre prendre. Attention au sens du modulo p.

Indication pour l'exercice 1201 ——— Retour à l'énoncé 1201

Ceci doit faire penser à la représentation matricielle de $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{C}\simeq\left\{\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\;\middle|\; a,b\in\mathbb{R}\right\}$$

Indication pour l'exercice 1203 Retour à l'énoncé 1203

Ça dépend si 3 est un carré dans $\mathbb{F}_p$.

Indication pour l'exercice 1204 Retour à l'énoncé 1204

Ça dépend de p.

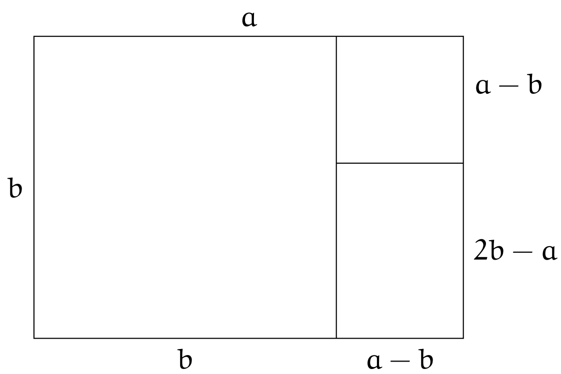
Indication pour l'exercice 1205 Retour à l'énoncé 1205

Tout le monde connaît $(3, 4, 5)$, ensuite il y a $(5, 12, 13)$. D'après Wikipédia, il y en a seize dont tous les termes sont inférieurs à 100.

Pour en trouver d'autres, considérer l'image de $\mathbb{Z}[i]$ par $z \mapsto z^2$.

Indication pour l'exercice 1208 Retour à l'énoncé 1208

On voit souvent le principe illustré avec l'équation de Fermat $x^4 + y^4 = z^4$ (on montre que $x^4 + y^4 = z^2$ n'a pas de solutions), mais il y a plus simple et plus visuel (donc mieux) : on peut prouver par descente infinie que $\sqrt{2}$ est irrationnel. Indication : considérer la figure suivante :



Dans le même genre, il y a également la preuve classique (Euclide ?) qu'une diagonale d'un pentagone régulier ne mesure pas son côté (au sens de la géométrie ancienne, c'est-à-dire que le rapport n'est pas une fraction). On prolonge deux côtés non adjacents du pentagone, on trace également ses diagonales, et on voit apparaître un petit pentagone un peu décalé par rapport au premier, donc la diagonale est égale au côté du pentagone initial. Ceci permet de construire une suite infinie de pentagones.

Sinon, la preuve classique d'irrationalité de $\sqrt{2}$ peut être reformulée sous forme de descente infinie (on trouve toujours que p et q sont divisibles par 2, mais c'est moins visuel (donc moins bien).

Indication pour l'exercice 1209 Retour à l'énoncé 1209

Quelles sont les symétries de l'équation ?

Indication pour l'exercice 1213 Retour à l'énoncé 1213

La question se pose surtout si k est fini évidemment.

Indication pour l'exercice 1218 Retour à l'énoncé 1218

Il y a trois facteurs, de degrés un, trois et de degré trois.

Indication pour l'exercice 1220 Retour à l'énoncé 1220
La quantité de polynômes unitaires de degré d irréductibles est équivalente à q^d/d, c'est un développement possible (Francinou-Gianella-Nicolas).

Statistiquement, on doit faire de l'ordre de d essais pour trouver un polynôme irréductible de degré d.

Indication pour l'exercice 1222 Retour à l'énoncé 1222
Oui

Indication pour l'exercice 1223 Retour à l'énoncé 1223

Si on n'a vraiment pas d'idée, il faut écrire une matrice 2×2 avec des coefficients variables et écrire. SInon, on peut prendre une matrice non diagonalisable (par exemple nilpotente) sous forme de Jordan, et la conjuguer par une matrice complexe.

Indication pour l'exercice 1226 Retour à l'énoncé 1226

Extrema liés. Le maximum vaut $\sqrt{5}$, atteint en $(1/\sqrt{5}, 4/\sqrt{5})$. Faire un dessin avec la normale à l'ellipse qui doit être perpendiculaire aux droites $x + y = cste$.

Indication pour l'exercice 1227 Retour à l'énoncé 1227

Voir le Perrin. Petit problème pour n pair. Gros problème pour $SO(4)$.

Indication pour l'exercice 1235 Retour à l'énoncé 1235
Ce que l'on voit instantanément, c'est que la matrice est de rang un. Ensuite, on reconnaît une matrice de la forme ${}^t v \cdot v$ avec v un vecteur unitaire, et donc...

Indication pour l'exercice 1236 Retour à l'énoncé 1236
Regarder l'effet sur la base canonique, utiliser ses doigts pour visualiser le trièdre formant la base canonique.

Indication pour l'exercice 1238 Retour à l'énoncé 1238
Rotation d'axe $(3, 1, 1)\mathbb{R}$ et d'angle $-\arccos(-5/6)$.

Indication pour l'exercice 1239 Retour à l'énoncé 1239
Attention aux petites valeurs de p, et à l'inversion de l'isomorphisme chinois.

Indication pour l'exercice 1243 Retour à l'énoncé 1243
Test de Pepin : $F_n = 2^{2^n} + 1$ est premier ssi $3^{\frac{F_n - 1}{2}} \equiv -1 \mod F_n$. La preuve est plus facile.

Indication pour l'exercice 1250 Retour à l'énoncé 1250
Le rang est invariant par extension de corps.

Indication pour l'exercice 1251 Retour à l'énoncé 1251

Indication pour l'exercice 1253 Retour à l'énoncé 1253
Écrire $A = PJ_rQ$, puis trouver M.

Indication pour l'exercice 1258 ——— Retour à l'énoncé 1258
Googler « déterminant de Gram » et apprendre les 10 premiers exercices et applications sur le sujet.

Indication pour l'exercice 1259 ——— Retour à l'énoncé 1259
Que représente le déterminant des trois vecteurs (a_i, b_i, c_i) ?

Indication pour l'exercice 1263 ——— Retour à l'énoncé 1263
Quel est le polynôme minimal ?

Indication pour l'exercice 1267 ——— Retour à l'énoncé 1267

Relations coefficients-racines.

Indication pour l'exercice 1272 ——— Retour à l'énoncé 1272
Le nombre $\zeta(3) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$ est appelé *constante d'Apéry* depuis 1978, date à laquelle Roger Apéry a montré qu'il était irrationnel. On ne sait pas encore s'il est transcendant. Il apparaît en physique, en théorie des nombres et autres domaines. Très peu de choses sont connues sur les valeurs aux entiers impairs de la fonction zêta : on ne sait toujours pas si $\zeta(5)$ est irrationnel, par exemple. Par contre, pour les valeurs aux entiers pairs, c'est Euler qui a fait le calcul.

Indication pour l'exercice 1276 ——— Retour à l'énoncé 1276
Pour commencer, tout dépend si -1 est un carré dans $\mathbb{F}_q$ ou non, car l'application ne sera alors même pas définie partout.

Indication pour l'exercice 1277 ——— Retour à l'énoncé 1277
Inclusion, puis égalité de cardinal.

Indication pour l'exercice 1278 ——— Retour à l'énoncé 1278
Utiliser une racine huitième primitive de l'unité (éventuellement dans une extension).

Indication pour l'exercice 1281 ——— Retour à l'énoncé 1281
L'application est un morphisme de groupes (facile) surjectif (moins facile, penser en termes de générateurs).

Indication pour l'exercice 1282 ——— Retour à l'énoncé 1282
Pour la deuxième question, il suffit de montrer que $X^4 + 1$ admet toujours une racine dans $\mathbb{F}_{p^2}$.

Indication pour l'exercice 1283 ——— Retour à l'énoncé 1283
Il y a une famille connue de polynômes irréductibles sur $\mathbb{Q}$.

Indication pour l'exercice 1284 ——— Retour à l'énoncé 1284
Les racines de ces polynômes sont dans $\mathbb{F}_{2^4} = \mathbb{F}_{16}$. Étudier $\mathbb{F}_{16}$ pour commencer : quel est le groupe $\mathbb{F}_{16}^*$? Grouper les éléments de $\mathbb{F}_{16}$ par éléments conjugués etc.

Pour la deuxième question, on rappelle qu'un polynôme primitif sur un corps fini est un polynôme irréductible dont les racines sont des générateurs du groupe multiplicatif du surcorps qu'elles engendrent.

Indication pour l'exercice 1288 ——— Retour à l'énoncé 1288
Il s'agit donc de montrer qu'un polynôme irréductible sur $\mathbb{Q}$ est séparable.

Indication pour l'exercice 1289 ——— Retour à l'énoncé 1289
Que vaut le discriminant du trinôme ? Est-ce un carré dans $\mathbb{F}_{97}$?

Indication pour l'exercice 1291 ——— Retour à l'énoncé 1291
Sur $\mathbb{F}_5$ non, et sur $\mathbb{F}_7$ oui (les solutions sont 2 et 4).

Indication pour l'exercice 1297 ——— Retour à l'énoncé 1297
Remarquer que $4096 = 2^{12}$. Quels sont les diviseurs de 12 ?

Indication pour l'exercice 1298 ——— Retour à l'énoncé 1298
Ce n'est pas un morphisme d'algèbres.

Indication pour l'exercice 1368 ——— Retour à l'énoncé 1368
Remarque que l'opérateur de dérivée second ∂_{tt} est en fait $\partial_t \circ \partial_t$, et de même pour ∂_{xx}. Ceci permet de se ramener à deux équations de transport très simples.

Indication pour l'exercice 1372 ——— Retour à l'énoncé 1372
Commencer par montrer que y est bornée.

Indication pour l'exercice 1380 ——— Retour à l'énoncé 1380
Penser aux nombres complexes.

Indication pour l'exercice 1393 ——— Retour à l'énoncé 1393
Utiliser la définition du spectre.

Indication pour l'exercice 1400 ——— Retour à l'énoncé 1400
La question a deux facettes : d'une part, qu'y a-t-il comme grands théorèmes sur les opérateurs compacts en général ? Et d'autre part, quelles sont des applications de ces théorèmes (par exemple aux équations différentielles) ?

Indication pour l'exercice 1407 ——— Retour à l'énoncé 1407
On a d'une part $|\chi_A - \chi_B| = \chi_{A\Delta B}$, d'autre part $[a,b]\Delta[c,d] \subset [a,c] \cup [b,d]$.

Indication pour l'exercice 1408 ——— Retour à l'énoncé 1408
Un opérateur Hilbert-Schmit est compact. Arzela-Ascoli. L'opérateur est en fait de rang deux.

Indication pour l'exercice 1411 ——— Retour à l'énoncé 1411
Il n'y a pas toujours de solution, il y a une alternative qui porte sur f. (Appelée alternative de Fredholm mais ici on peut tout faire à la main.)

Par exemple si le second membre f vaut 1, alors l'équation $y'' + y = 1$ possède des solutions avec $y(0) = y(2\pi) = 0$: par exemple $y(t) = 1 - \cos(t) + \lambda \sin(t)$.

Mais si le second membre est par exemple $f(t) = \sin(t)$, on voit qu'il n'y a pas de solutions avec ces conditions aux limites.

Indication pour l'exercice 1420 ——— Retour à l'énoncé 1420
Pour commencer, combien y a-t-il de matrices inversibles de taille k dans $\mathbb{F}_q$?

Indication pour l'exercice 1421 Retour à l'énoncé 1421
Faire des exemples si nécessaire ?

Indication pour l'exercice 1426 Retour à l'énoncé 1426
Sous-entendu : les automorphismes du groupe additif, pas les automorphismes d'anneau. (Combien y a-t-il d'automorphismes d'anneau ?)

Indication pour l'exercice 1435 Retour à l'énoncé 1435
Les matrices diagonalisables sont denses dans $M_n(\mathbb{C})$.

Indication pour l'exercice 1436 Retour à l'énoncé 1436
Pour l'astuce, une indication est : que vaut $-\ln(2)$?

Indication pour l'exercice 1437 Retour à l'énoncé 1437
Il suffit de montrer qu'il existe un nombre infini non dénombrable de boules disjointes d'un certain rayon : aucune suite ne pourra interscter toutes ces boules.

Indication pour l'exercice 1441 Retour à l'énoncé 1441
En introduisant le vecteur u dont les coordonnées dans la base canonique sont $(2, -3)$, l'équation est en fait :

$$u \cdot \nabla f = 0$$

Indication pour l'exercice 1442 Retour à l'énoncé 1442
Par exemple en utilisant les matrices I_k.

Indication pour l'exercice 1491 Retour à l'énoncé 1491
Donner des exemples de groupes abéliens infinis et de représentations de ces groupes. Sont-elles irréductibles ? Par exemple, que se passe-t-il pour $SO(2, \mathbb{R})$?

Indication pour l'exercice 1494 Retour à l'énoncé 1494
Exemples de « mauvaises » réponses : on ne diagonalise a priori pas pour :

1. résoudre un système linéaire.
2. inverser une matrice.
3. calculer un déterminant.

On rappelle que diagonaliser est difficile, ne serait-ce que parce qu'il n'y a pas de méthode générale pour trouver les racines d'un polynôme. Même si on a les valeurs propres, la détermination des espaces propres prend du temps, la matrice de passage peut être compliquée...

Indication pour l'exercice 1536 Retour à l'énoncé 1536
Montrer qu'elle est surjective.

Indication pour l'exercice 1570 Retour à l'énoncé 1570
Ce sont les $\ker P(u)$ avec P qui divise le polynôme minimal. Immédiat avec $k[X]$-modules, mais on peut faire à la main. Commencer avec u endomorphisme nilpotent cyclique.

Indication pour l'exercice 1586 Retour à l'énoncé 1586
Ça dépend de U.

Indication pour l'exercice 1639 ——— Retour à l'énoncé 1639
On peut abaisser le degré comme pour une équation normale, ou bien chercher une solution particulière sous la forme $H(t)f(t)$.

La situation physique qui correspond à cette équation est celle d'un circuit RC (la fonction inconnue représente la tension aux bornes du condensateur), lorsque l'on allume le générateur de tension (constante) à $t = 0$.

Indication pour l'exercice 1640 ——— Retour à l'énoncé 1640
Par exemple dans $E = l^2(\mathbb{N})$.

Indication pour l'exercice 1643 ——— Retour à l'énoncé 1643
Tracer les isoclines à $y' = -1, 0, 1$: on voit un entonnoir et un anti-entonnoir.

3 Leçons d'algèbre (numérotation 2018)

101 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

102 Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.

103 Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

104 Groupes finis. Exemples et applications.

105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de GL(E). Applications.

107 Représentations et caractères d'un groupe fini sur un C-espace vectoriel. Exemples.

108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

110 Structure et dualité des groupes abéliens finis. Applications.

120 Anneaux Z/nZ. Applications.

121 Nombres premiers. Applications.

122 Anneaux principaux. Applications.

123 Corps finis. Applications.

125 Extensions de corps. Exemples et applications.

126 Exemples d'équations diophantiennes.

141 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

142 PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications

144 Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications

150 Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

151 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

152 Déterminant. Exemples et applications.

153 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

154 Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

155 Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

156 Exponentielle de matrices. Applications.

157 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

158 Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

159 Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

160 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

161 Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Applications en dimensions 2 et 3.

162 Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

170 Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

171 Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

181 Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

182 Applications des nombres complexes à la géométrie.

183 Utilisation des groupes en géométrie.

190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

4 Leçons d'analyse (numérotation 2018)

201 Espaces de fonctions. Exemples et applications.

202 Exemples de parties denses et applications.

203 Utilisation de la notion de compacité.

204 Connexité. Exemples et applications.

205 Espaces complets. Exemples et applications.

207 Prolongement de fonctions. Exemples et applications.

208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

209 Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Exemples et applications.

213 Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.

215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

218 Applications des formules de Taylor.

219 Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

220 Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'étude des solutions en dimension 1 et 2.

221 Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

222 Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires.

223 Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications

224 Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

228 Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

229 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

233 Méthodes itératives en analyse numérique matricielle.

234 Espaces L^p

235 Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.

236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

241 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

243 Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

245 Fonctions holomorphes sur un ouvert de C. Exemples et applications.

246 Séries de Fourier. Exemples et applications.

250 Transformation de Fourier. Applications.

253 Utilisation de la notion de convexité en analyse.

260 Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.

261 Fonction caractéristique d'une variable aléatoire. Exemples et applications.

262 Modes de convergence d'une suite de variables aléatoires. Exemples et applications.

263 Variables aléatoires à densité. Exemples et applications.

264 Variables aléatoires discrètes. Exemples et application