

Séries de Fourier

La référence bibliographique principale pour les séries de Fourier est le livre de Zuily et Queffélec "Analyse pour l'agrégation".

Partie I. Rappels de cours

1 Définitions et premières propriétés

Pour une fonction $f \in L^1(0,2\pi)$ on définit :

— les coefficients de Fourier
$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx, \qquad n \in \mathbb{Z};$$

— la série de Fourier
$$S_f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(f)e^{inx};$$

— les sommes partielles de la série de Fourier
$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx}$$

— les sommes de Fejér
$$\sigma_n(f) = \frac{S_0 + S_1 + \cdots + S_{n-1}}{n}$$

Lemme de Riemann-Lebesgue. Les coefficients de Fourier d'une fonction de L^1 forment une suite bornée qui tend vers 0 lorsque $|n| \to \infty$.

La réciproque est fausse (cf. exercices).

Produits

— Inégalité de Hölder : $\|fg\|_{L^r} \le \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$ dés lors que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

— Inégalité de Young, convolution : si $f, g \in L^1$ alors la convolution $f * g$
$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)\,dt.$$
est bien définie pour presque tout x et $f * g \in L^1$. Plus généralement, si $1 \le p,q,r \le \infty$ sont tels que $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ et si $f \in L^p$ et $g \in L^q$ alors $f * g \in L^r$ et $\|f * g\|_{L^r} \le \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$.

Divers

— L'espace $L^2(0,2\pi)$ est un espace de Hilbert et l'ensemble des e^{inx}, $n \in \mathbb{Z}$, forme une base hilbertienne.

— Si f est continue, périodique et C^1 par morceaux, alors $c_n(f') = inc_n(f)$.

— Deux fonctions de L^1 avec les mêmes coefficients de Fourier sont égales presque partout.

2 Convergence de la série de Fourier

D'abord un résultat négatif.

Théorème. *Pour tout x_0, il existe une fonction continue périodique f telle que la suite $S_n(f,x_0)$ soit non bornée (par rapport à n).*

Ainsi, au moins pour les fonctions continues et périodiques, la série de Fourier ne converge pas toujours vers la fonction considérée. Cependant, le théorème de Fejér nous dit que cette convergence a quand même lieu mais au sens de Cesàro.

Théorème (Fejér)**.** *a) Si f est continue et périodique, alors $\|\sigma_n(f)\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty}$ et $\sigma_n(f) \to f$ uniformément.*

b) Si $f \in L^p$ avec $1 \leq p < \infty$, alors $\|\sigma_n(f)\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}$ et $\sigma_n(f) \to f$ dans L^p.

Le théorème de Dirichlet nous donne un critère pour la convergence ponctuelle de la série de Fourier.

Théorème (Dirichlet)**.** *Soit $f \in L^1$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $f_-, f_+ \in \mathbb{C}$ tels que*

$$\int_0^1 \frac{|f(x_0+t)-f_+|}{t}\,dt < \infty \qquad et \qquad \int_0^1 \frac{|f(x_0-t)-f_-|}{t}\,dt < \infty.$$

Alors $S_n(f,x_0) \to \frac{f_+ + f_-}{2}$ lorsque $n \to \infty$.

En pratique, f_+ et f_- sont les limites à gauche et à droite de f en x_0 et la fonction f admet des dérivées à gauche et à droite en x_0 (ce qui implique l'hypothèse du théorème de Dirichlet).

On peut ensuite se poser la question de la convergence de la série de Fourier dans L^p lorsque la fonction est dans L^p (ou continue si $p = \infty$). Le premier théorème de ce paragraphe montre que c'est faux quand $p = \infty$ (c'est néanmoins vrai pour les fonctions continues et C^1 par morceaux, cf. théorème ci-dessous). Une légère modification de la preuve de ce théorème montre que c'est aussi faux quand $p = 1$. En revanche, si $p = 2$ le résultats est vrai comme on peut le voir aisément à partir de la théorie des espaces de Hilbert et en se rappelant que les e^{inx} forment une base hilbertienne de L^2. Plus généralement, on peut montrer que c'est vrai pour tout $1 < p < \infty$ mais le cas $p \neq 2$ est un résultat difficile d'analyse harmonique qui sort très largement du programme de l'agrégation.

Voici maintenant d'autres résultats liés à la convergence de la série de Fourier.

Théorème. *a) Si $\sum_{-N}^{N} \alpha_n e^{inx} \to f$ uniformément lorsque $N \to \infty$, alors f est continue périodique et les coefficients de Fourier de f sont les α_n.*

b) Pour tout $\Lambda \subset \mathbb{Z}$, l'ensemble des polynômes trigonométriques à support dans λ (c'est-à-dire les sommes finies $\sum_{n\in\Lambda} a_n e^{inx}$) sont denses dans l'espaces des fonctions continues périodiques dont les coefficients de Fourier s'annulent pour $n \notin \Lambda$.

c) Si f est continue et périodique et $S_n(f,x_0) \to l$, alors $l = f(x_0)$.

d) Si $f \in L^1$ est telle que ses coefficients de Fourier forment une suite de ℓ^1, alors f est somme de sa série de Fourier presque partout (et donc f est égale presque partout à une fonction continue).

e) Si f est C^1 par morceaux, continue et périodique, alors les coefficients de Fourier forment une suite de ℓ^1 et f est somme de sa série de Fourier.

L'énoncé du théorème de Weierstrass ne fait pas intervenir les séries de Fourier mais peut se démontrer aisément à l'aide des séries de Fourier :

Théorème (Weierstrass)**.** *Toute fonction continue sur un intervalle compact est limite uniforme d'une suite de polynômes.*

3 Si on veut aller plus loin

Phénomène de Gibbs. Les singularités d'une fonction peuvent s'amplifier dans la série de Fourier. En effet, pour la fonction $G(x) = \frac{\pi - x}{2}$ pour $0 < x < 2\pi$ nous avons que les sommes de Fourier sont données par

$$G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}$$

et vérifient

$$\liminf_{n\to\infty} \|G_n\|_{L^\infty} \geq \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} = 1,85\cdots > \frac{\pi}{2} = \|G\|_{L^\infty}.$$

Régularité d'une fonction et décroissance de ses coefficients de Fourier Il existe un lien très fort entre la régularité d'une fonction et les propriétés de décroissance de ses coefficients de Fourier. Nous savons déjà que l'appartenance d'une fonction à L^2 se traduit par le fait que les coefficients de Fourier doivent être de carré sommable. Le théorème qui suit nous donne des caractérisations de type C^k. Définissons, pour $0 < \alpha < 1$, la classe de Hölder C^α (parfois notée $C^{0,\alpha}$) de la manière suivante :

$$C^\alpha = \{f \in C_{per}\ ;\ \exists C > 0,\ |f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha\ \forall x, y\}.$$

Théorème. *Soit f une fonction continue et périodique.*

a) Si $f \in C^k$ alors $\lim_{|n|\to\infty} n^k c_n(f) = 0$.

b) Si $k \geq 2$ et $|c_n(f)| \leq C|n|^{-k}$ pour tout n, alors $f \in C^{k-2}$.

c) On a que $f \in C^\infty$ si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe une constante $C = C(k)$ telle que $|c_n(f)| \leq C|n|^{-k}$ pour tout n.

d) Si $f \in C^\alpha$, alors ses coefficients de Fourier sont dans ℓ^p pour tout $p > \frac{2}{2\alpha+1}$.

e) Soit $\omega(\delta) = \sup\{|f(x) - f(y)|\ ;\ |x-y| \leq \delta\}$ le module de continuité de f. Si $\omega(1/n)\ln n \to 0$ quand $n \to \infty$, alors la série de Fourier de f converge uniformément.

f) Si $f \in C^\alpha$ alors la série de Fourier de f converge uniformément.

g) Soit $\mathscr{P}_n = \{\sum_{-n}^{n} a_k e^{ikx}\}$ l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré $\leq n$. Nous avons que $f \in C^\alpha$ si et seulement si $d_\infty(f, \mathscr{P}_n) = \sup_{x, P \in \mathscr{P}_n} |f(x) - P(x)| \leq Cn^{-\alpha}$ pour une certaine constante C.

Partie II. Exercices

Exercice 1. (Non-surjectivité)

a) Soit f une fonction continue périodique telle que tous ses coefficients de Fourier sont positifs. Montrer à l'aide du théorème de Fejér et du lemme de Fatou que
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) < \infty.$$
En déduire que f est égale à la somme de sa série de Fourier.

b) Soit f une fonction de L^1 telle que $c_n(f) = -c_{-n}(f) \geq 0$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que
$$\sum_{n\geq 1} \frac{c_n(f)}{n} < \infty$$
Indication : considérer la fonction $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

c) Soit $a_n = -a_{-n} = \frac{1}{\log n}$ pour $n \geq 2$. Montrer que les a_n ne peuvent pas être les coefficients de Fourier d'une fonction de L^1.

Exercice 2. (Noyau de Dirichlet et non convergence de la série de Fourier) Soit
$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$$
le noyau de Dirichlet.

a) Montrer que $D_n(x) = \dfrac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)}$ et que $S_n(f) = D_n * f$.

b) Montrer que si $|x| \leq \pi$ alors $D_n(x) = 2\,\frac{\sin nx}{x} + r_n(x)$ où r_n est uniformément borné en x et n. En déduire que $\|D_n\|_{L^1}$ est non bornée.

c) Montrer que la norme de la forme linéaire $f_n : C^0_{per} \to \mathbb{C}$, $f_n = (f * D_n)(0)$ est $\|D_n\|_{L^1}$.

d) Conclure à l'aide du théorème de Banach-Steinhaus qu'il existe une fonction continue et périodique dont la série de Fourier ne converge pas en 0.

Exercice 3. (Noyau de Fejér et théorème de convergence de Fejér) Soit
$$K_n = \frac{D_0 + D_1 + \cdots + D_{n-1}}{n}$$
le noyau de Fejér.

a) Montrer que $K_n = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} (1 - \frac{|k|}{n}) e^{ikx} = \frac{\sin^2(nx/2)}{n \sin^2(x/2)}$.

b) Montrer que $\|K_n\|_{L^1} = 1$ et $\sigma_n(f) = K_n * f$.

c) Si $0 < \delta \leq \pi$ alors $\displaystyle\int_{\delta<|x|<\pi} K_n \to 0$ quand $n \to \infty$.

d) Montrer que si f est continue et périodique alors $\sigma_n(f) \to f$ uniformément.

e) En utilisant un argument de densité, montrer que si $f \in L^p$, $p < \infty$, alors $\sigma_n(f) \to f$ dans L^p.

Exercice 4. (Noyau de Jackson et construction d'une fonction continue nulle part dérivable) Soit
$$J_n = \frac{K_n^2}{\|K_n^2\|_{L^1}}$$
le noyau de Jackson. Soit $(a_n)_{n\geq 1} \in \ell^1$, $q > 1$ et $\lambda_n \in \mathbb{N}^*$ tels que $\lambda_{n+1} \geq q\lambda_n$. On pose $f(t) = \displaystyle\sum_{1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n t}$. Le but de cet exercice est de montrer que si f est dérivable en un point, alors $a_n = o(1/\lambda_n)$ quand $n \to \infty$.

a) Montrer que $J_n \geq 0$, que $\|J_n\|_{L^1} = 1$, que J_n est un polynôme trigonométrique de degré inférieur à $2n$ et que pour tout $k \in \{0,1,2\}$ nous avons que $\int_0^{2\pi} x^k J_n(x) = O(n^{-k})$.

b) Montrer qu'on peut supposer f dérivable en 0 avec $f(0) = f'(0) = 0$. On fera cette hypothèse dans la suite.

c) Soit $\mu_n = \min(\lambda_{n+1} - \lambda_n, \lambda_n - \lambda_{n-1})$. Montrer que si $0 < |k| < \mu_n$, alors $c_{\lambda_n - k}(f) = 0$.

d) Montrer que si $1 \leq k < \frac{\mu_n}{2}$ alors

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) J_k(t) e^{-i\lambda_n t}.$$

e) En choisissant $k = k_n = \left[\frac{\mu_n}{2}\right] - 1$ dans la question précédente, montrer que $k_n a_n = o(1)$.

f) Conclure.

g) Construire une fonction continue qui est nulle part dérivable.

Exercice 5. (Inégalité isopérimétrique) Soit γ une courbe que l'on supposera de longueur 1 (par souci de simplicité) et paramétrée par la longueur d'arc ($|\gamma'| = 1$). Soit A l'aire enserrée par la courbe γ. Le but de cet exercice est de montrer que $A \leq \frac{1}{4\pi}$ avec égalité seulement dans le cas du cercle.

a) A l'aide la formule de Green-Riemann montrer que

$$A = \int_0^1 \gamma_1 \gamma_2' = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_0^1 \bar{\gamma}\gamma'.$$

b) Soient c_n les coefficients de Fourier de γ. Montrer que

$$1 = \sum_n 4\pi^2 n^2 |c_n|^2$$

et

$$A = \sum_n \pi n |c_n|^2.$$

c) Conclure.

Exercice 6. (Inégalité de Bernstein) Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ distincts et $h(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j e^{i\lambda_j t}$ où les coefficients a_j sont des nombres complexes arbitraires. Le but de cet exercice est de montrer l'inégalité suivante :

$$\|h'\|_{L^\infty} \leq \|h\|_{L^\infty} \max_j |\lambda_j|. \qquad (*)$$

a) Soit $\lambda = \max_j |\lambda_j|$. Montrer qu'il suffit d'avoir l'existence de suites c_k et t_k telles que

$$h' = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k h(t + t_k) \qquad \text{et} \qquad \sum_{-\infty}^{\infty} |c_k| = \lambda.$$

b) Montrer que

$$h'(t) = \sum_{j=1}^{n} i a_j \varphi(\lambda_j) e^{i\lambda_j t}$$

où $\varphi(x) = \lambda \varphi_0(x/\lambda)$ et φ_0 est égale à l'identité sur $[-1,1]$.

c) On prolonge φ_0 par $\varphi_0(t) = 2 - t$ sur $[1,2]$ puis par périodicité de période 4. Montrer que la fonction $\psi(x) = \varphi_0(x+1)$ a tous les coefficients de Fourier positifs. Exprimer les coefficients de Fourier de φ_0 en fonction de ceux de ψ.

d) Montrer l'existence des suites c_k et t_k comme dans la question a).

Exercice 7. (Équation de la chaleur) Soit h une fonction C^1 sur $[0,\pi]$ telle que $h(0) = h(\pi) = 0$. Le but de cet exercice est de montrer que le problème mixte pour l'équation de la chaleur

$$\begin{aligned} \partial_t u - \partial_x^2 u = 0 \quad \text{pour} \quad t > 0,\ 0 < x < \pi \qquad & \text{(équation de la chaleur)} \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \quad \text{pour} \quad t \geq 0 \qquad & \text{(condition de Dirichlet)} \\ u(0,x) = h(x) \quad \text{pour} \quad 0 \leq x \leq \pi \qquad & \text{(condition de Cauchy)} \end{aligned}$$

admet exactement une solution $u = u(t,x)$ continue pour $t \geq 0$, $0 \leq x \leq \pi$ et de classe C^2 pour $t > 0$, $0 < x < \pi$.

a) Montrer que h peut s'écrire sous la forme

$$h(x) = \sum_1^\infty a_n \sin nx$$

où les a_n sont des constantes et la série converge normalement.

b) Trouver une solution u_n du problème mixte dans le cas où $h = a_n \sin nx$ (chercher u_n de la forme $f(t)g(x)$).

c) Montrer alors que $u = \sum_1^\infty u_n$ est solution du problème mixte.

d) (Principe du maximum pour l'équation de la chaleur) Soit $u = u(t,x)$ continue pour $t \geq 0$, $0 \leq x \leq \pi$ et de classe C^2 pour $t > 0$, $0 < x < \pi$. Montrer que si $\partial_t u - \partial_x^2 u \leq 0$ alors le maximum de u sur le compact $[0,T] \times [0,\pi]$ est atteint pour $t = 0$ ou pour $x = 0$ ou pour $x = \pi$.

e) Conclure.