L'extension E est séparable sur $\mathbb{R}$, caractéristique 0 oblige, et l'on bénéficie donc de la correspondance de Galois qui envoie un sous-groupe H du groupe de Galois G de E sur $\mathbb{R}$ sur le corps des invariants E^H, avec $[E^H : \mathbb{R}] = [G : H]$. Soit S un 2-Sylow de G, de sorte que E^S est une extension de degré impair de $\mathbb{R}$. Soit α dans E^S, $\mathbb{R}[\alpha]$ est donc de degré impair m sur $\mathbb{R}$ et comme le polynôme minimal de α sur $\mathbb{R}$ est réel, irréductible de degré impair, il est de degré 1. Bref, $m = 1$ et G est un 2-groupe d'ordre $n > 2$. Donc, son sous-groupe $\mathrm{Gal}(E|\mathbb{C})$ est encore un 2-groupe. On sait donc qu'il possède un sous-groupe d'indice 2, et donc que $\mathbb{C}$ possède une extension quadratique, ce qui est absurde car $\mathbb{C}$ est quadratiquement clos.

1.3.3 Prérequis sur la topologie normique

Nous voici arrivés à la frontière entre l'Algébrie et la Topoldavie. En effet, il est temps d'utiliser un peu de topologie dans les affaires de réduction. Rappelons comment la topologie intervient dans les espaces vectoriels de dimension finie. Pour plus de détails, on conseille [9, 4.3], ou [3, II-A].

On note dans la suite $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie. Soit $||-||$ une norme sur E. On appelle boule ouverte de rayon $r > 0$ de centre $x \in E$ l'ensemble

$$B_{x,r} := \{y \in E,\ ||y - x|| < r\}.$$

Un ensemble ouvert est par définition un ensemble O tel que, pour tout x de O, il existe une boule ouverte de centre x incluse dans O. On vérifie que l'ensemble de ces ouverts définit bien une topologie sur E.

La topologie ainsi définie dépend *a priori* de la norme choisie, mais, il se trouve qu'en dimension finie, elle est indépendante du choix de la norme, ce qui veut dire que les ouverts définis pour une norme ou pour une autre seront en dernier ressort les mêmes. Ce résultat provient du fait que deux normes N et N' sont (en dimension finie) équivalentes, c'est-à-dire qu'il existe deux réels strictement positifs λ et μ tels que pour tout x de E

$$\lambda N(x) \leq N'(x) \leq \mu N(x).$$

Cette inégalité se démontre à l'aide du théorème de Riesz (une sphère est compacte en dimension finie) et en utilisant comme norme de référence la norme infinie de $\mathbb{K}^n$: pour $x \in \mathbb{K}^n$, $N_\infty(x) = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$.

La topologie construite à partir d'une norme ne dépend donc pas de la norme choisie et elle appelée topologie normique de l'espace (de dimension finie). On peut donc se servir de n'importe quelle norme pour montrer qu'une fonction sur E est continue.

Le résultat fondamental qui va suivre se démontre encore une fois en utilisant la norme de référence N_∞ sur $\mathbb{K}^n$ et le fait que toute application lipschitzienne est continue, voir exercice 1.3.27.

Proposition 1.3.25. *Toute forme linéaire sur l'espace E de dimension finie est continue.*

Ce résultat est un résultat basique qu'il faut tout le temps avoir en tête, par exemple, pour montrer :

- tout hyperplan de E est fermé (c'est le noyau d'une forme continue !),

• tout sous-espace de E est fermé (c'est, par dualité, une intersection d'un nombre fini d'hyperplans),

• toute fonction polynomiale de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$ est continue (c'est une combinaison linéaire de produits de formes linéaires). En particulier, le déterminant est une fonction continue sur l'espace vectoriel des matrices sur $\mathbb{K}$.

Sur l'espace vectoriel des matrices, on se servira souvent de la norme infinie pour les limites de matrices. Par exemple, on voit facilement à l'aide de cette norme que si pour tout i, j dans $[1, n]$, la suite $(a_{ij,n})_n$ tend vers (a_{ij}), alors la suite de matrices $(a_{ij,n})_{i,j}$ tend vers la matrice $(a_{ij})_{i,j}$. On a un résultat analogue dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]_d$ des polynômes de degré inférieur à d.

N'oublions pas que l'espace vectoriel des matrices est bien plus qu'un espace, c'est une $\mathbb{R}$-algèbre, et il est intéressant à ce titre de le doter d'une norme compatible avec sa structure d'algèbre. C'est ce que l'on fait avec une famille de normes appelées normes (sous-)multiplicatives, et en particulier, avec les normes subordonnées.

Pour chaque norme $|| - ||$ sur $\mathbb{K}^n$, on a une norme $||| - |||$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donnée par

$$|||M||| = \max_{||X||=1} ||MX||,\ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

On voit facilement qu'elle vérifie la propriété des normes (sous-)multiplicatives

$$|||MN||| \leq |||M|||\times|||N|||.$$

Puisque les normes sont toutes équivalentes, on ne se privera pas d'utiliser celles-ci, qui sont particulièrement pratiques.

Remarque 1.3.26. Le lecteur verra rapidement dans les exemples qui suivent que la continuité est facile à utiliser. Le plus souvent (puisque l'on travaille sur des espaces métriques), on s'en sert pour dire que si $(X_n)_n$ est une suite qui tend vers X, et f est une fonction continue sur l'espace, alors

$$\lim_{n\to\infty} f(X_n) = f\big(\lim_{n\to\infty} X_n\big) = f(X).$$

L'utilité de mettre une topologie est alors simple à comprendre : d'une part si l'on dispose de deux fonctions continues f et g sur E et si l'on trouve une partie dense de E sur laquelle f et g coïncident, alors elles coïncident sur E tout entier[26]. D'autre part, si une fonction d'un connexe X de E vers un ensemble discret est continue, elle est constante sur tout X.

1.3.4 Réduction et topologie

Exercice 1.3.27. [*Continuité des formes linéaires]
Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur le corps $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Montrer que toute forme linéaire est continue.

[26] Cela va nous remettre de la déception face à la dure réalité que tout endomorphisme n'est pas diagonalisable car, en revanche, l'ensemble des matrices diagonalisables complexes est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.