

Transformation de Fourier 1. Classe de Schwartz

Références bibliographiques :

- Analyse réelle et complexe, W. Rudin.
- Distributions et équations aux dérivées partielles. C. Zuily.

Partie I. Rappels de cours

1 Transformation de Fourier pour les fonctions

Définition. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. On définit la transformée de Fourier de f par

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx \quad (*)$$

où $x \cdot \xi$ désigne le produit scalaire habituel de \mathbb{R}^n : $x \cdot \xi = \sum_{j=1}^n x_j \xi_j$. On note \mathcal{F} la transformation de Fourier en tant qu'application, c'est-à-dire que $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$.

Voici un premier résultat sur la transformée de Fourier.

Théorème (Riemann-Lebesgue). Si $f \in L^1$ alors \widehat{f} est une fonction uniformément continue, bornée et nulle à l'infini.

Un exemple très important de calcul explicite de transformée de Fourier celui de la gaussienne :

$$\mathcal{F}(e^{-a|x|^2}) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4a}}.$$

Ici, a est un nombre complexe de partie réelle positive et \sqrt{a} désigne la racine de partie réelle positive.

La transformation de Fourier est inversible. Plus précisément :

Théorème. Si $f, \widehat{f} \in L^1$ alors

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \widehat{f}(\xi) d\xi.$$

Sur L^2 , la transformée de Fourier est une isométrie à une constante près.

Théorème (Plancherel). Si $f \in L^2$ alors $\widehat{f} \in L^2$ et $\|\widehat{f}\|_{L^2} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \|f\|_{L^2}$. De plus, $\widehat{\widehat{f}}(x) = (2\pi)^n f(-x)$.

Lorsque $f \in L^2$ la formule (??) n'a pas de sens. Ici \widehat{f} se définit par densité de $L^1 \cap L^2$ dans L^2 en posant $\widehat{f} = \lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{f}_k$ où $f_k \in L^1 \cap L^2$ tend vers f dans L^2 .

2 Classe de Schwartz (fonctions à décroissance rapide)

On appelle multi-indice un élément $\alpha \in \mathbb{N}^n$. On définit $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} = \left(\frac{\partial}{\partial_{x_1}}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial_{x_n}}\right)^{\alpha_n}$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$

Définition. On appelle espace de fonctions à décroissance rapide ou encore classe de Schwartz l'ensemble

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ tel que } x^\alpha \partial^\beta f \text{ soit bornée sur } \mathbb{R}^n \ \forall \alpha, \beta \text{ multi-indices}\}.$$

La classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est un espace vectoriel métrique complet (espace de Fréchet) avec comme distance

$$d(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_n(f-g)}{1 + p_n(f-g)}$$

où

$$p_n(f) = \sup_{x, |\alpha| \leq n} (1 + |x|)^n |\partial^\alpha f(x)|$$

La convergence dans la classe de Schwartz équivaut à la convergence uniforme de tous les $x^\alpha \partial^\beta f$.

La classe de Schwartz est stable par multiplication par des fonctions dites à croissance lente :

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ tel que } \forall \alpha \exists m \in \mathbb{N}, C > 0, |\partial^\alpha f(x)| \leq C(1 + |x|^m)\}$$

La transformation de Fourier est une bijection de la classe de Schwartz :

Théorème. \mathcal{F} est un isomorphisme topologique et algébrique de \mathcal{S} dans \mathcal{S} d'inverse

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \xi} f(\xi) d\xi$$

Voici maintenant quelques propriétés de la transformation de Fourier et de la classe de Schwartz :

Proposition. a) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Alors l'application $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ni \varphi \mapsto f\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est linéaire et continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

b) Si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ alors $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et on a la continuité de l'application bilinéaire $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ni (f, g) \mapsto f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

c) $\widehat{x^\alpha f} = (i\partial_\xi)^\alpha \widehat{f}$

d) $\widehat{\partial^\alpha f} = (i\xi)^\alpha \widehat{f}$

e) Soient φ et ψ deux fonctions à décroissance rapide. Alors

i) $\int \widehat{\varphi} \psi = \int \varphi \widehat{\psi}$

ii) $\langle \varphi, \psi \rangle_{L^2} = \int \varphi \overline{\psi} = (2\pi)^{-n} \int \widehat{\varphi} \overline{\widehat{\psi}} = (2\pi)^{-n} \langle \widehat{\varphi}, \widehat{\psi} \rangle_{L^2}$ (Parseval)

iii) $\widehat{\varphi * \psi} = \widehat{\varphi} \widehat{\psi}$

iv) $\widehat{\varphi \psi} = (2\pi)^{-n} \widehat{\varphi} * \widehat{\psi}$

Enfin, il y a un lien fort entre le support d'une fonction et la croissance à l'infini de la transformée de Fourier. Ce lien est mis en évidence dans les théorèmes de Paley-Wiener dont voici un exemple.

Théorème (Paley-Wiener). On a l'équivalence entre

a) f une fonction de classe $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support dans $\overline{B(0, R)}$;

b) La transformée de Fourier de f se prolonge en une fonction holomorphe sur \mathbb{C}^n qui vérifie que

$$\forall N \in \mathbb{N} \ \exists C \geq 0 \ \forall \xi \in \mathbb{C}^n \quad |\widehat{f}(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{-N} e^{R|\operatorname{Im} \xi|}.$$

Partie II. Exercices

Exercice 1. (Calculs) Soit $a > 0$.

- a) Calculer les transformées de Fourier de $\mathbb{1}_{[-a,a]}$ et $\frac{\sin ax}{x}$ sur \mathbb{R} .
- b) Soit $f_a(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{x^2 + a^2}$. Montrer que $f_a \in L^1(\mathbb{R})$ et calculer \widehat{f}_a . En utilisant le résultat, montrer que $f_a * f_b = f_{a+b}$. En déduire que $\widehat{e^{-a|x|}} = \frac{2a}{\xi^2 + a^2}$.
- c) Comment calculer la transformée de Fourier d'une fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ où $\deg Q - \deg P \geq 2$ et Q est sans racines réelles ?

Exercice 2. (Transformée de Fourier de la Gaussienne) Soit $a \in \mathbb{C}$ de partie réelle strictement positive. On pose $f(x) = e^{-a|x|^2}$ où $x \in \mathbb{R}^n$. Le but de cet exercice est de calculer la transformée de Fourier de f .

- a) Montrer qu'on peut se ramener au cas $n = 1$.

On suppose dorénavant que $n = 1$.

- b) Trouver une EDO vérifiée par f .

- c) En appliquant la transformée de Fourier à cette ODE, calculer \widehat{f} en fonction de $\int_{\mathbb{R}} f$.

- d) En appliquant le théorème intégral de Cauchy calculer $\int_{\mathbb{R}} f$ et conclure.

Exercice 3. (Inversion de la transformation de Fourier).

- a) Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) g(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \widehat{g}(x) dx. \quad (**)$$

- b) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ une fonction continue et bornée telle que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Soit $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ une fonction à décroissance rapide, $\varepsilon > 0$ et $a \in \mathbb{R}^n$. En utilisant $(**)$ avec $g(\xi) = h(\varepsilon \xi) e^{i\xi \cdot a}$ et en faisant $\varepsilon \rightarrow 0$ montrer que

$$h(0) \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi \cdot a} d\xi = f(a) \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{h}(x) dx.$$

- c) En choisissant h convenablement conclure que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi \cdot a} d\xi = (2\pi)^n f(a).$$

- d) En convolant avec une approximation de l'identité montrer qu'on peut se passer de l'hypothèse f continue et bornée.

Exercice 4. Montrer l'identité de Parseval

$$\forall f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad \int_{\mathbb{R}^n} f \bar{g} = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f} \bar{\widehat{g}}$$

et en déduire le théorème de Plancherel (utiliser la densité de \mathcal{S} dans L^2).

Exercice 5. Si $f \in \mathcal{S}$, $|h| = 1$ alors

$$\frac{f(x + \varepsilon h) - f(x)}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} \partial_h f(x) = h \cdot \nabla f(x)$$

dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 6. Lesquelles des fonctions suivantes appartiennent à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$?

- a) $e^{-(x_1 + x_2^2 + \dots + x_n^2)}$

- b) $|x|^n e^{-\frac{|x|^2}{n^2}}$
- c) $\frac{1}{(1+|x|^2)^{2n}}$
- d) $\frac{\sin e^{-|x|^2}}{1+|x|^2}$
- e) $\frac{\cos e^{-|x|^2}}{(1+|x|^2)^n}$
- f) $e^{-|x|^2} \sin e^{x_1^2}$
- g) $e^{-a|x|^2} \sin e^{x_1^2}, a > 0$
- h) $\int e^{i\langle x, y \rangle} \frac{\sin e^{-|y|^2}}{1+|y|^2} dy$

Exercice 7. Calculer les transformées de Fourier des applications $P(x)e^{-a|x|^2}$ et $e^{-a|x|^2} \sin \langle x, x_0 \rangle$, où P est un polynôme, $a > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 8. Une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ admet-elle toujours une primitive dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$? Si non, donner une CNS pour qu'il existe une primitive dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Exercice 9. Le but de cet exercice est de montrer un théorème de Paley-Wiener qui relie les propriétés du support d'une fonction aux propriétés de décroissance de sa transformée de Fourier.

- a) Soit $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ une fonction de classe C^∞ à support dans l'intervalle $[-M, M]$. Montrer que \widehat{f} se prolonge en une fonction holomorphe sur \mathbb{C} qui vérifie la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists C = C(n) > 0 \quad \text{tel que} \quad |z^n \widehat{f}(z)| \leq C e^{M|\operatorname{Im} z|} \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (***)$$

- b) Réciproquement, soit g une fonction entière qui vérifie (??).

 - i) Montrer que $g|_{\mathbb{R}}$ admet une transformée de Fourier inverse notée f .
 - ii) Majorer $\mathcal{F}(f^{(k)})$ et en déduire que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.
 - iii) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$ l'application $x \mapsto g(x + ia)$ est intégrable et que

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi(x+ia)} g(x+ia) dx.$$

- iv) En prenant a de même signe que ξ montrer l'inégalité

$$|f(\xi)| \leq C_1 e^{(M - |\xi|)|a|}$$

pour une certaine constante C_1 .

- v) Conclure que f est à support dans l'intervalle $[-M, M]$.