Développement : Théorème de Gauss-Lucas et application.

Théorème de Gauss-Lucas : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant.
Les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P.

Démonstration :
On peut écrire $P(X) = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X-\lambda_k)^{m_k}$ où $r \geq 1$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ sont les racines deux à deux distinctes de P et $m_1, \dots, m_r$ leur ordre.

$$P'(X) = \lambda \sum_{k=1}^{r} m_k (X-\lambda_k)^{m_k-1} \prod_{l\neq k} (X-\lambda_l)^{m_l}$$

On a donc :

$$\frac{P'(X)}{P(X)} = \frac{\sum_{k=1}^{r} m_k (X-\lambda_k)^{m_k-1} \prod_{l\neq k} (X-\lambda_l)^{m_l}}{\prod_{k=1}^{r} (X-\lambda_k)^{m_k}}$$

On a la décomposition en élément simple.

$$\frac{P'(X)}{P(X)} = \sum_{k=1}^{r} \frac{m_k}{X-\lambda_k}$$

Soit z une racine de P'.

- Si $z = \lambda_k$ pour un certain $k \in [\![1, r]\!]$, alors elle est dans l'enveloppe convexe des racines de P.
- Sinon : $0 = \frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^{r} \frac{m_k}{z-\lambda_k} = \sum_{k=1}^{r} m_k \frac{\overline{z-\lambda_k}}{|z-\lambda_k|^2}$

  Donc en passant au conjugué : $\sum_{k=1}^{r} m_k \frac{z-\lambda_k}{|z-\lambda_k|^2} = 0$

Donc : $\sum_{k=1}^{r} z \frac{m_k}{|z-\lambda_k|^2} = \sum_{k=1}^{r} \frac{m_k}{|z-\lambda_k|^2} \lambda_k$

On a donc :

$$z = \frac{\sum_{k=1}^{r} \frac{m_k}{|z-\lambda_k|^2} \lambda_k}{\sum_{k=1}^{r} \frac{m_k}{|z-\lambda_k|^2}} \qquad (*)$$

Comme chaque $\frac{m_k}{|z-\lambda_k|^2}$ est strictement positif, $(*)$ exprime le fait que z est un barycentre à coefficient strictement positif des λ_k. La racine de P' est donc dans l'enveloppe convexe des racines de P.

<u>Application</u> : Déterminons le plus grand $n \geq 2$ tel que les racines non nulles de $(X+1)^n - X^n - 1$ soient de module 1.

<u>Démonstration</u>

- Si $n=2$, $P(X) = (X+1)^2 - X^2 - 1 = 2X$ donc P a une seule racine : 0
- Soit $n \geq 3$ et $P(X) = (X+1)^n - X^n - 1$.

On a alors : $P'(X) = n(X+1)^{n-1} - n\,X^{n-1}$

Soit z une racine de P'. On remarque que z est non nulle et donc :

$$\left(\frac{z+1}{z}\right)^{n-1} = 1.$$

Il existe donc $k \in [\![0, n-2]\!]$ tel que $\frac{z+1}{z} = e^{\frac{2ik\pi}{n-1}}$. On a en fait, $k \neq 0$ puisque $z+1 \neq z$.

On a donc que les $n-2$ racines de P' sont caractérisées par :

$$\frac{z_k+1}{z_k} = e^{\frac{2ik\pi}{n-1}}, \quad k \in [\![1, n-2]\!]$$

donc $z_k = \dfrac{-1}{1-e^{\frac{2ik\pi}{n-1}}} = \dfrac{e^{-\frac{ik\pi}{n-1}}}{2i\sin\left(\frac{k\pi}{n-1}\right)}$ (Par l'angle moitié)

Si toutes les racines de P sont de module 1, les racines de P' sont nécessairement dans le disque unité, par le théorème précédent.

Le module de z_1 est $\dfrac{1}{2\sin\left(\frac{\pi}{n-1}\right)} > 0$ car $0 < \frac{\pi}{n-1} < \pi$

On remarque que pour $n \geq 8$: $2\sin\frac{\pi}{n-1} < 2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$ et $|z_1| > 1$.
donc un entier $n \geq 8$ ne convient pas.

Regardons $P_0(X) = (X+1)^7 - X^7 - 1$. 0 et -1 sont racine évidentes.

donc $P_0(X) = X(X+1)(7X^4 + 14X^3 + 21X^2 + 14X + 7)$

Soit $Q(X) = 7X^4 + 14X^3 + 21X^2 + 14X + 7$.

On va écrire $Q(X) = X^2 R\left(X + \frac{1}{X}\right)$.

$$\begin{aligned}
Q(X) &= X^2\left(7X^2 + 14X + 21 + \frac{14}{X} + \frac{7}{X^2}\right)\\
&= 7X^2\left(X^2 + \frac{1}{X^2} + 2\left(X + \frac{1}{X}\right) + 3\right)\\
&= 7X^2\left(\left(X+\frac{1}{X}\right)^2 + 2\left(X+\frac{1}{X}\right) + 1\right)
\end{aligned}$$

On pose $Y = X + \frac{1}{X}$ et on a : $Q(X) = 7X^2(Y-1)^2$

Donc une racine de P_0, distincte de 0 et -1 doit vérifier $z + \frac{1}{z} + 1 = 0$, ce qui équivaut à $z^2 + z + 1 = 0$ et donc à $z = j$ ou $z = j^2$ $\quad j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

L'ensemble des racines de P_0 est $\{0, -1, j, j^2\}$ qui est contenu dans le disque unité.

Donc le plus grand entier n pour lequel $(X+1)^n - X^n - 1$ a toutes ses racines non nulles de module 1 est $n = 7$