Théorème : Par cinq points distincts A, B, C, D, E dont quatre quelconques ne sont pas alignés passe une unique conique.

Preuve :

- Si 4 points d'entre eux sont alignés sur une droite Δ, toute conique réunion de Δ et d'une droite contenant le 5^e point convient.

- On peut donc supposer que 3 points parmi les 5 forment un triangle (non aplati), supposons par exemple que ce triangle est ABC que nous prenons comme triangle de référence.

Appelons (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) les coordonnées barycentriques respectives de D et E, et soit (X, Y, Z) les coordonnées barycentriques dans la base du triangle ABC.

Une conique $\mathcal{C}$ passe par ces 5 points $\Leftrightarrow$ elle a une équation de la forme $pYZ + qZX + rXY = 0$ où (p, q, r) est solution du système linéaire homogène (S) : $\begin{cases} py_1z_1 + qz_1x_1 + rx_1y_1 = 0 \\ py_2z_2 + qz_2x_2 + rx_2y_2 = 0 \end{cases}$

- Le système est de rang ≤ 2 dans un espace de dimension 3, donc on a toujours des solutions (p, q, r) non nulles ($\dim \mathrm{Ker}_S \geq 1$). D'où l'existence d'une conique.

- Il faut maintenant voir que $\mathrm{rang}(S) = 2$, ie $\mathrm{rang}(S)$ n'est pas ≤ 1 car il y a plusieurs coniques qui conviennent ssi $\mathrm{rg}(S) \leq 1$, or c'est le cas quand les determinants extraits de taille 2 sont tous nuls

Les déterminants sont : - $d_1 = \begin{vmatrix} y_1z_1 & z_1x_1 \\ y_2z_2 & z_2x_2 \end{vmatrix} = z_1z_2(y_1x_2 - x_1y_2) = -z_1z_2 \begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & y_1 & y_2 \\ 1 & z_1 & z_2 \end{vmatrix}$

- $d_2 = \begin{vmatrix} y_1z_1 & x_1y_1 \\ y_2z_2 & x_2y_2 \end{vmatrix} = y_1y_2(z_1x_2 - x_1z_2) = -y_1y_2 \begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 \\ 1 & y_1 & y_2 \\ 0 & z_1 & z_2 \end{vmatrix}$

- $d_3 = \begin{vmatrix} z_1x_1 & x_1y_1 \\ z_2x_2 & x_2y_2 \end{vmatrix} = x_1x_2(z_1y_2 - y_1z_2) = -x_1x_2 \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 0 & y_1 & y_2 \\ 0 & z_1 & z_2 \end{vmatrix}$

On a deux cas possibles :

- Si ni D ni E ne sont sur (BC) alors on a $x_1 \neq 0$ et $x_2 \neq 0$.

Dans ce cas $d_3 = -x_1x_2(z_1y_2 - y_1z_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 0 & y_1 & y_2 \\ 0 & z_1 & z_2 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow$ A, D, E sont alignés.

On montre alors que d_1 et d_2 sont non nuls, car si l'un des deux est nul on obtiendrait 4 points alignés, ce qui est exclut.

Les déterminants extraits ne sont pas tous nuls, donc $rg(S) = 2$.

Et on fait de même pour (AB) et (AC).

- Si au contraire D est sur (BC) alors $x_1 = 0$ et donc $x_2 \neq 0$ (car sinon E est sur (BC) et c'est le cas précédent), et de plus $y_1z_1 \neq 0$ (car D n'est pas confondu avec B ou C).

Il faut alors vérifier que d_1 ou d_2 est non nul.

Or comme $\begin{cases} d_1 = z_1z_2(y_1x_2 - x_1y_2) = \overbrace{y_1z_1}^{\neq 0}\overbrace{x_2}^{\neq 0}z_2 \\ d_2 = y_1y_2(z_1x_2 - x_1z_2) = \underbrace{y_1z_1}_{\neq 0}\underbrace{x_2}_{\neq 0}y_2 \end{cases}$ il suffit de voir

que y_2 ou z_2 est non nul. Si $y_2 = z_2 = 0$ on aura que $A = E$ ce qui est exclut.

Donc on a forcément un déterminant non-nul, donc $rg(S) = 2$.

Et on fait de même avec (AB), (AC) et le point E.

En conclusion notre système est de rang 2 et admet une droite vectorielle de solutions. Les équations de coniques obtenues étant toutes proportionnelles on a bien montré que une seule conique convient. ⊠

<u>Théorème</u>: La conique est non-dégénérée $\Leftrightarrow$ 3 points quelconques parmi les 5 donnés sont non-alignés.

<u>Preuve</u>: "$\Leftarrow$" Supposons la conique dégénérée, alors le déterminant de la forme quadratique associée est nul : $\begin{vmatrix} 0 & r & q \\ r & 0 & p \\ q & p & 0 \end{vmatrix} = 2pqr = 0 \Rightarrow pqr = 0$, donc on a par exemple $p = 0$. L'équation devient $X(qZ + rY) = 0$, c'est l'équation d'une réunion de 2 droites, donc 3 points alignés.

"$\Rightarrow$" Si 3 points parmi les 5 sont alignés alors la conique est l'union de deux droites qui est bien une conique dégénérée. ⊠

<u>Ref.</u>: "Géométrie analytique classique", Jean-Denis Eiden