Développement 1 : **Leçon n°**151 Action de Steinitz.

Théorème. Soit $G = GL_m(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K})$, $G \times \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$
$((P,Q), A) \longmapsto PAQ^{-1}$

1. $A \simeq B \Leftrightarrow rg A = rg B$

2. En notant $\mathcal{O}_r$ l'orbite des matrices de rang r on a $\overline{\mathcal{O}_r} = \bigsqcup_{0 \leq k \leq r} \mathcal{O}_k$.

Preuve

1. "$\Rightarrow$" : $\exists P \in GL_m(\mathbb{K})$, $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ tq $B = PAQ^{-1}$. D'où $rg B = rg A$.

"$\Leftarrow$" : Montrons que si on note $r = rg A = rg B$ alors $A \simeq I_{r,0} = \begin{pmatrix} I_r & \\ & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

On aura alors $A \simeq I_{r,0} \simeq B$, d'où $A \simeq B$ par transitivité.

Soit $A = Mat_{\underline{e},\underline{f}}(\varphi)$ matrice de $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ où $\underline{e}$, $\underline{f}$ bases de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$.

Il faut construire une base $\underline{e}'$ de $\mathbb{K}^n$ et $\underline{f}'$ de $\mathbb{K}^m$ tq $Mat_{\underline{e}',\underline{f}'}(\varphi) = I_{r,0}$.

On va construire $\underline{e}'$ et $\underline{f}'$.

$\ker \varphi \subset \mathbb{K}^n$ de dimension $n-r$ possède une base $(e'_{r+1}, \dots, e'_n)$. C'est une partie libre de $\mathbb{K}^n$, par le théorème de la base incomplète

$\exists\, \underline{e}' = (e'_1, \dots, e'_r, e'_{r+1}, \dots, e'_n)$ base de $\mathbb{K}^n$.

On pose $f'_i = \varphi(e'_i)$ $\forall 1 \leq i \leq r$.

$(f'_i)_{1 \leq i \leq r}$ est un système libre car $(e'_i)_{1 \leq i \leq r}$ est libre et φ est injective sur $\langle (e'_i)_{1 \leq i \leq r} \rangle = (\ker \varphi)^{\perp}$.

En effet, $\ker \varphi\big|_{\langle (e'_i)_{1 \leq i \leq r} \rangle} = \ker \varphi \cap \langle (e'_i)_{1 \leq i \leq r} \rangle = \{0\}$.

Toujours par le théorème de la base incomplète on complète $(f'_i)_{1 \leq i \leq r}$ en une base $\underline{f}' = (f'_1, \dots, f'_m)$ de $\mathbb{K}^m$.

Ainsi $Mat_{\underline{e}',\underline{f}'}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} = I_r$

D'où $A \simeq B$ ⊠

2. "$\supseteq$". Soit $B \in \mathcal{O}_k$, $0 \leq k \leq r$. On veut trouver une suite (A_m) avec $rg A_m = r$ et $\lim_{m \to \infty} A_m = B$.

$\exists k \in [\![0, r]\!]$ tel que $B = P I_{k,0} Q^{-1}$.

Pose $A_m = P \begin{pmatrix} I_k & & \\ & \frac{1}{m} I_{r-k} & \\ & & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} \in \mathcal{O}_r$, ainsi on a bien $\lim_{m \to \infty} A_m = B$

et $rg A_m = r$.

Donc $A \in \overline{\mathcal{O}_r}$, d'où $\overline{\mathcal{O}_r} \supseteq \bigsqcup_{0 \leq k \leq r} \mathcal{O}_k$

"$\subseteq$" On a déjà $\mathcal{O}_r \subseteq \bigsqcup_{0\le k\le r} \mathcal{O}_k$. Il suffit donc de montrer que $\bigsqcup_{0\le k\le r} \mathcal{O}_k$ est fermé, on aura dans ce cas $\overline{\mathcal{O}_r} \subseteq \overline{\bigsqcup_{0\le k\le r} \mathcal{O}_k} = \bigsqcup_{0\le k\le r} \mathcal{O}_k$.

Soient $I \subset \{1,\dots,m\}$, $J \subset \{1,\dots,n\}$ tels que $|I| = |J| = r$.

Le mineur d'ordre r associé à (I,J) est l'image de $\Delta_{I,J} : \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} \longmapsto \det\left((a_{ij})_{\substack{i\in I \\ j\in J}}\right)$$

On a que le rang de A est l'ordre du plus grand mineur non nul, ie

$\operatorname{rg} A = \max\{r : \exists\, \Delta_{I,J}(A) \neq 0,\ |I| = |J| = r\}$

Soit $\delta : \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}^{\binom{n}{r+1}\binom{m}{r+1}}$

$$A \longmapsto (\Delta_{I,J}(A))_{\substack{I\subset\{1,..,m\} \\ J\subset\{1,..,n\} \\ |I|=|J|=r+1}}$$

$$\begin{aligned}
\bigsqcup_{0\le k\le r} \mathcal{O}_k &= \{A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}),\ \operatorname{rg} A \le r\} \\
&= \{A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}),\ \Delta_{I,J}(A) = 0\ \forall\, |I| = |J| \geqslant r+1\} \\
&= \{A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}),\ \Delta_{I,J}(A) = 0\ \forall\, |I| = |J| = r+1\} \\
&= \delta^{-1}(\{0\})
\end{aligned}$$

où 0 est le vecteur nul de $\mathbb{K}^{\binom{n}{r+1}\binom{m}{r+1}}$ et donc $\{0\}$ son sous-espace nul.

On a $\delta^{-1}(\{0\})$ fermé car les $\Delta_{I,J}$ sont continus (polynomiaux)

Donc $\bigsqcup_{0\le k\le r} \mathcal{O}_k$ est fermé et $\overline{\mathcal{O}_r} \subseteq \bigsqcup_{0\le k\le r} \mathcal{O}_k$

Donc $\overline{\mathcal{O}_r} = \bigsqcup_{0\le k\le r} \mathcal{O}_k$. $\boxtimes$

<u>Appli</u> : $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

<u>Preuve</u>. On a $GL_n(\mathbb{K}) = \mathcal{O}_n$ l'orbite des matrices de rang n dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, donc par ce qui précède :

$$\overline{GL_n(\mathbb{K})} = \overline{\mathcal{O}_n} = \bigsqcup_{k=0}^{n} \mathcal{O}_k = \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).\ \boxtimes$$

<u>Ref</u> : "H2G2" - Caldero-Germoni