Développement 2: Leçon 152 Référence: Ravière, Petit guide de calcul diff.

PROPRIÉTÉ

L'application déterminant est de classe C^1 sur $M_n(\mathbb{R})$ et $\forall (X,H) \in M_n(\mathbb{R})^2$, on a $D\det(X)(H) = tr({}^t com(X) H)$.

APPLICATION: Soient $(y_1, \dots, y_n)$ des solutions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ du système différentiel linéaire $y' = A(t)y$ où $A(t) \in M_n(\mathbb{R})$ est une fonction continue en t, et soit $w(t) = \det(y_1(t), \dots, y_n(t))$ le déterminant wronskien. Alors $w'(t) = tr(A(t)).w(t)$ et $\det(e^{tA}) = e^{t.tr(A)}$

Soit $E = M_n(\mathbb{R})$. On munit E de la norme $\|.\|$ / Pour $A \in M$, $\|A\| = \max_{i=1}^{n} |\lambda_i|$ où les λ_i, pour $i \in [\![1,n]\!]$ sont les valeurs propres de A.

* Montrons que l'application det est de classe C^1 sur E et que $D\det(I) = tr$ où I la matrice identité de taille $n \times n$ et tr la trace.

- Par définition: $\det : E \to \mathbb{R}$, $A \longrightarrow \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \times \dots \times a_{\sigma(n),n}$

Donc det est polynomiale en les coefficients de la matrice, elle est donc de classe C^∞ sur E, donc C^1 sur E.

- Soit $H \in E$, et on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres, donc $I+H$ a pour valeurs propres les $1+\lambda_i$, pour $i \in [\![1,n]\!]$.

D'où
$$\begin{aligned}
\det(I+H) &= \prod_{i=1}^{n} (1+\lambda_i) \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i + \underset{\|H\| \to 0}{o}(\|H\|) \\
&= 1 + tr(H) + \underset{\|H\| \to 0}{o}(\|H\|) \\
&= \det(I) + tr(H) + \underset{\|H\| \to 0}{o}(\|H\|)
\end{aligned}$$

or $tr : E \to \mathbb{R}$, $A \to Tr(A)$ est une application linéaire.

Donc on a montré que $D\det(I) = tr$.

** Déduisons que pour tous $(X,H) \in E^2$, $D\det(X)(H) = tr({}^t \tilde{X} H)$ où $\tilde{X}$ est la comatrice de X.

- 1er cas: $X \in GL_n(\mathbb{R})$:

Alors on se ramène au point précédent en écrivant:

$$\begin{aligned}\det(X+H) &= \det(X(I+X^{-1}H))\\ &= \det(X)\det(I+X^{-1}H)\\ &= \det(X)\,(1+tr(X^{-1}H)+\underset{\|H\|\to 0}{o}(\|H\|))\\ &= \det(X)+tr((\det X)X^{-1}H))+\underset{\|H\|\to 0}{o}(\|H\|)\\ &= \det(X)+Tr(\check{X}H)+\underset{\|H\|\to 0}{o}(\|H\|)\end{aligned}$$

Comme précédemment, Tr est une application linéaire.

Donc on en déduit que $D\det(X)(H) = Tr(\check{X}H)$ $\forall (X,H)\in E^2$, X inversible.

. 2ème cas : $X\in E$ quelconque :

$Gl_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense de E : $Gl_n(\mathbb{R}) = \{A\in E \,/\, \det A\neq 0\}$ et det étant une application continue $\Rightarrow Gl_n(\mathbb{R})$ est un ouvert.

Soit $Y\in E$ quelconque :

Notons ses valeurs propres $\lambda_1,\dots,\lambda_n$, on peut donc choisir une suite $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 0 dans $\mathbb{R}$, telle que pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$\det(Y-\varepsilon_k I) = \prod_{i=1}^{m}(\lambda_i-\varepsilon_k)\neq 0$$

Ainsi les matrices $Y_k = Y-\varepsilon_k I$ sont dans $Gl_n(\mathbb{R})$, et convergent vers Y dans E. D'où la densité de $Gl_n(\mathbb{R})$ dans E.

De plus, $X\to\check{X}$ est continue de E dans E car les cofacteurs sont des fonctions polynomiales en les coefficients de X.

det étant de classe C^1 sur E, on peut donc prolonger par continuité à E l'expression de la différentielle obtenue en un point inversible.

Donc $\forall (X,H)\in E^2$, $D\det(X)(H) = Tr({}^t\check{X}H)$.

*** APPLICATION :

Soit $Y = (y_1|\dots|y_m)$ la matrice de colonnes $(y_i)_{i=1}^{m}\in E$.

Par hypothèse, on en déduit que $Y' = AY$.

On a : $w' = (\det Y)' = D\det(Y)(Y') = tr({}^t com(Y)\,Y')$.

Or $tr({}^t com(Y)\,Y') = tr({}^t com(Y)AY) = tr(AY\,{}^t com(Y))$ par symétrie de la trace

et $Y\,{}^t com(Y) = (\det Y)I = wI$.

Finalement $w'(t) = (tr(A(t)))\,w(t)$, d'où $w(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} tr(A(s))\,ds\right)w(t_0)$

Le wronskien est donc soit identiquement nul, soit jamais nul.

Lorsque A ne dépend pas de t, l'équation $Y' = AY$ admet la solution $Y = e^{tA}$, et on obtient alors $\det(e^{tA}) = e^{t\,tr(A)}$