DÉTERMINANT. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

Soit $\mathbb{K}$ un corps. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

I - DÉFINITIONS ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS.

1) Déterminant d'une famille de vecteurs

Déf 1: • Soient des $\mathbb{K}$-ev $E_1, .., E_p$ et F. Une application $f : E_1 \times ... \times E_p \to F$, $(x_1, .., x_p) \mapsto f(x_1, .., x_p)$ est dite p-linéaire si en tout point les p applications partielles sont linéaires.

• L'ensemble de ces applications est noté $\mathcal{L}(E_1, .., E_p, F)$ et c'est un $\mathbb{K}$-ev.

• Si $E_1 = .. = E_p = E$ et $F = \mathbb{K}$, on parle de formes p-linéaire sur E et l'ensemble des formes p-linéaires sur E est noté $\mathcal{L}_p(E, \mathbb{K})$.

Ex 2: Si $\varphi_1, .., \varphi_p \in E^*$, l'application $E^p \to \mathbb{K}$, $(x_1, .., x_p) \mapsto \varphi_1(x_1) ... \varphi_p(x_p)$ est une forme p-linéaire sur E.

Déf 3: $f \in \mathcal{L}_p(E, \mathbb{K})$ est dite alternée si $f(x_1, .., x_p) = 0$ dès que deux vecteurs parmi les x_i sont égaux.

Déf 4: Pour toute forme p-linéaire $f \in \mathcal{L}_p(E, \mathbb{K})$, on note $f^\natural : E^p \to \mathbb{K}$, $(x_1, .., x_p) \mapsto \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) f(x_{\sigma(1)}, .., x_{\sigma(p)})$.
Ainsi construite, $f^\natural$ est une forme p-linéaire alternée.

→ Dorénavant, E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Thm 5: L'ensemble des formes n-linéaires alternées sur un $\mathbb{K}$-ev E de dimension n est un $\mathbb{K}$-ev de dimension 1.

Thm / Déf 6: Il existe une et une seule forme n-linéaire alternée prenant la valeur 1 sur une base donnée $B = (e_1, .., e_n)$ de E : on l'appelle déterminant dans la base B et on le note $\det_B$.

Si $x_1, .., x_n \in E$ $\left(x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{i,j} e_j \right)$, on a :
$$\det_B(x_1, .., x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) x_{1,\sigma(1)} \cdots x_{n,\sigma(n)}.$$

Rmq 7: Changement de bases : Si B et B' sont deux bases de E alors $\det_{B'}(x_1, .., x_n) = \det_{B'} B . \det_B(x_1, .., x_n)$
On en déduit $\det_{B'} B . \det_B B' = 1$.

Thm 8: Soient $x_1, .., x_n \in E$. Les propositions suivantes sont équivalentes :
(i) $(x_1, .., x_n)$ forment une famille liée.
(ii) Pour toute base B de E, $\det_B(x_1, .., x_n) = 0$.
(iii) Il existe une base B de E telle que $\det_B(x_1, .., x_n) = 0$.

2) Déterminant d'une matrice. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Déf 9: Soit $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle déterminant de A le déterminant des vecteurs colonnes de A dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$, et on le note $\det(A)$. On a :
$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}.$$

Ex 10: Pour $n = 3$: $S_3 = \{ \sigma_1 = Id, \sigma_2 = (1\,2\,3), \sigma_3 = (1\,3\,2), \tau_1 = (2\,3), \tau_2 = (1\,3), \tau_3 = (1\,2) \}$ avec $\varepsilon(\sigma_i) = 1$ et $\varepsilon(\tau_i) = -1$ $(i = 1, 2, 3)$.
$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_3} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} a_{\sigma(3)3} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

Prop 11: $\det(A) = \det({}^tA)$

Prop 12: $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

Prop 13: Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(AB) = \det(A) \det(B)$

Prop 14: $A \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$ et $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

Prop 15: Deux matrices semblables ont le même déterminant.

3) Déterminant d'un endomorphisme.

Déf 16 : Soit f un endomorphisme de E. On appelle $\det(f)$ le déterminant de la matrice qui représente f dans une base (quelconque de E) : $\det(f) = \det(\mathrm{Mat}_e(f))$ avec e une base de E.

Prop 17 : Par analogie avec les matrices on a les propriétés suivantes : Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$,
(i) $\det(f \circ g) = \det(f) \cdot \det(g)$.
(ii) $(f \in GL(E) \Leftrightarrow \det(f) \neq 0)$ et $\det(f^{-1}) = (\det(f))^{-1}$.

II- CALCULS DE DÉTERMINANTS.

1) Déterminant triangulaire par blocs.

Prop 18 : Si $M = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ alors $\det(M) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Prop 19 : Si A est triangulaire supérieure ou inférieure, $A = (a_{ij})$ alors $\det(A) = a_{11} \dots a_{nn}$.

Prop 20 : Si on effectue une permutation $\sigma \in S_n$ sur les colonnes (ou les lignes) de A, le déterminant de A est multiplié par $\varepsilon(\sigma)$.

Prop 21 : On ne change pas la valeur d'un déterminant en ajoutant à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes. Même chose pour les lignes.

Rmq 22 : On utilise le pivot de Gauss pour se ramener à une matrice triangulaire.

Ex 23 :

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = 1 \times (-4) \times (3) = 12.$$

2) Mineurs et cofacteurs. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Déf 24 : • Pour (i,j), on appelle mineur de a_{ij}, le déterminant Δ_{ij} de la matrice obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ième colonne de la matrice A.
• Le scalaire $A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$ s'appelle le cofacteur de a_{ij}.

Ex 25 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad A_{1,1} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 10.$$

Prop 26 : (Développement selon une ligne ou une colonne) :
(i) Développement par rapport à la j-ième colonne :
$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \det(A)$.
(ii) Développement par rapport à la i-ème ligne :
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \det(A)$.

Déf 27 : La matrice $(A_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ des cofacteurs des éléments de A est appelée comatrice de A et on la note $\mathrm{Com}(A)$.

Prop 28 : $A \, {}^t\mathrm{Com}(A) = {}^t\mathrm{Com}(A) \, A = (\det(A)) \cdot I_n$.

Cor 29 : Si A est inversible, $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \, {}^t\mathrm{Com}(A)$.

Ex 30 : Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ inversible alors
$A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

3) Déterminant particuliers.

Ex 31 : Déterminant de Vandermonde : Soit $(x_i)_{1 \le i \le n} \in \mathbb{K}^n$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

Ex 32 : Déterminant circulant : Soit $(a_i)_{1\le i\le n} \in \mathbb{C}^n$.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{vmatrix} = \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega^k)$$

où $P = \sum_{k=1}^{n} a_k X^{k-1}$ et ω une racine primitive n-ième de l'unité.

Ex 33 : Déterminant de Cauchy : Soient $(a_i) \in \mathbb{K}^n$, $(b_i) \in \mathbb{K}^n$, $i \in [\![1,n]\!]$ tels que $\forall (i,j)$, $a_i + b_j \neq 0$.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \dots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \dots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix} = \frac{\prod_{i<j} (a_j - a_i) \prod_{i<j} (b_j - b_i)}{\prod_{i,j} (a_i + b_j)}.$$

III - APPLICATIONS DU DÉTERMINANT.

1) Volume par les matrices de Gram.

Soit E un e-v euclidien de dim finie n.

Déf 34 : Soit $(v_1, .., v_l) \in E^l$, on appelle matrice de Gram la matrice symétrique $G(v_1, .., v_l) = (\langle v_i, v_j \rangle)_{1\le i,j\le l} \in M_l(\mathbb{R})$.

Rmq 35 : Si $V \in M_{n,l}(\mathbb{R})$ est la matrice de $(v_1, .., v_l)$ dans une BON $(e_i)_{1\le i\le n}$, on a $G(v_1, .., v_l) = {}^tVV$.

Déf 36 : On appelle l-volume euclidien sur E toute application $vol_l : E^l \to \mathbb{R}_+^*$ qui respecte :

(i) la dilatation : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $vol_l(v_1, .., \lambda v_j, .., v_l) = |\lambda| vol_l(v_1, .., v_l)$

(ii) l'invariance par transvection : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ et $i<j$, $vol_l(v_1, .., v_j + \lambda v_i, .., v_l) = vol_l(v_1, .., v_j, .., v_l)$.

(iii) l'invariance par isométrie : $\forall O \in O_n(\mathbb{R})$, $vol_l(O(v_1), .., O(v_l)) = vol_l(v_1, .., v_l)$

(iv) la normalisation : $(e_i)_{1\le i\le n}$ BON, $vol_l(e_1, .., e_l) = 1$.

Thm 37 : Soit $l \in \mathbb{N}^*$, $l<n$. Il existe un unique l-volume euclidien qui est : $vol_l(v_1, .., v_l) = \sqrt{\det G(v_1, .., v_l)}$

Rmq 38 : Lorsque $l = n$, $V \in M_n(\mathbb{R})$ est carrée et on a $\det G(v_1, .., v_n) = \det({}^tVV) = (\det(V))^2$ i.e $vol_n(v_1, .., v_n) = |\det V|$.

2) Le polynôme caractéristique. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$

Déf 39 : On appelle polynôme caractéristique de A le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ défini par $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$.

Rmq 40 : $\chi_A(0) = \det(A)$

Prop 41 : $\chi_A(X) = \chi_{{}^tA}(X)$

Prop 42 : Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristiques.

Thm 43 : (Cayley-Hamilton) : $\chi_A(A) = 0$

3) Lien avec l'analyse. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

Prop 44 : $\det : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $A \mapsto \det(A)$ est $\mathcal{C}^\infty$.

Prop 45 : Soit $\mathcal{O}_r$ l'ensemble des matrices de rang r, $0 < r \le n$. Alors $\overline{\mathcal{O}_r} = \bigcup_{0\le k\le r} \mathcal{O}_k$.

Prop 46 : $GL_n(\mathbb{K})$ est ouvert et dense dans $M_n(\mathbb{K})$. $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Rmq 47 : $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe.

Prop 48 : L'application déterminant est $\mathcal{C}^1$ et $\forall X, H \in M_n(\mathbb{R})$, on a : $D\det(X)(H) = tr({}^tCom(X).H)$.

App 49 : Soient $(y_1, .., y_n)$ des solutions (à valeurs dans $\mathbb{R}^n$) du système différentiel linéaire $y' = A(t)y$ où $A(t) \in E$ est une fonction continue en t et soit $w(t) = \det(y_1(t), .., y_n(t))$ le déterminant wronskien. Alors $w'(t) = (tr(A(t))).w(t)$ et $\det(e^{tA}) = e^{t.tr(A)}$.

Dev 1

Dev 2

Références : - GOURDON Algèbre. - CVA Caldero.
- ROUVIÈRE Petit guide de calcul diff.
- GRIFONE Algèbre linéaire.