Développement 1 : **Leçon n° 153**

Réf : Gourdon Algèbre.

La Décomposition de DUNFORD :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tq le poly carac P_f de f est scindé sur $\mathbb{K}$.
Alors il existe un unique couple $(d, n) \in (\mathcal{L}(E))^2$ avec d diagzble et n nilpotente tq i) $f = d + n$
ii) $n \circ d = d \circ n$.

On écrit $P_f = \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ avec $\forall i$ on note $N_i = \ker(f - \lambda_i Id)^{\alpha_i}$ les espaces carac de f

EXISTANCE : Comme $E = N_1 \oplus \dots \oplus N_s$, il suffit de df d et n sur chaque N_i. Posons alors : $d_i(x) = \lambda_i x$ et $n(x) = f(x) - \lambda_i x$ $\forall i, \forall x \in N_i$

Autrem^t dit $\forall i$ on a $d_i = d_{|N_i} = \lambda_i Id_{|N_i}$

et $n_i = n_{|N_i} = f_{|N_i} - \lambda_i Id_{|N_i}$

Comme les N_i sont stables par f, n_i et d_i sont des endomorphismes de N_i

- Ainsi df d est diagzble
- $\forall i$, on a $n_i^{\alpha_i} = 0$ (car par df de N_i $(f - \lambda_i Id)^{\alpha_i}(x) = 0$)

On prend $\alpha = \sup \alpha_i \rightarrow n^{\alpha}$ s'annule donc sur chaque N_i donc sur $E = \bigoplus_{i=1}^{s} N_i$ c.à.d $n^{\alpha} = 0$ (d'où n nilpotente)

- Il reste à mq d et n commuttent : $\forall i$, on a $d_i = \lambda_i Id_{|N_i}$ dc $n_i \circ d_i = d_i n_i$

c.à.d que d et n commuttent sur chaque N_i, donc sur $E = \bigoplus_{i=1}^{s} N_i$.

UNICITÉ : Soit (d', n') un autre couple vérifiant les condit°.
On remarque que $f \circ d' = d' \circ f$ donc $\forall i$, N_i est stable par d'
$(\forall x \in N_i, \ (f - \lambda_i Id)^{\alpha_i}[d'(x)] = d' \circ (f - \lambda_i Id)^{\alpha_i}(x) = 0)$
Comme $d_{|N_i} = \lambda_i Id_{N_i}$, on en déduit que $d \circ d' = d' \circ d$ sur N_i $\forall i$
Comme $E = \bigoplus_{i=1}^{s} N_i$, on en déduit que d et d' commuttent.
De plus d et d' dzbles, on peut dc les diagonaliser dans une m̂ base, ce qui prouve que $d' - d$ est diag.

Comme $\left.\begin{array}{l} n = f - d \\ n' = f - d' \\ \text{et } d \circ d' = d' \circ d \end{array}\right]$ n et n' commuttent

Si on choisit p et q tq $n^p = n'^q = 0$ dc
$$(n - n')^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} n'^k (-n)^{p+q-k}$$

$\Rightarrow$ - si $k < q$ alors $p + q - k \geq p$ dc $(-n)^{p+q-k} = 0$
- si $k \geq q$ alors $(n')^k = 0$

] $n - n'$ est nilpotent

Donc $n - n' = d - d'$ est nilpotent, or $d - d'$ est diagzble d'où $d - d' = n - n' = 0$ ☒

APPLICATION :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, χ_A scindé

Alors : $\exp(A)$ dzble $\iff$ A dzable.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si A dzble : $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ tq $A = PDP^{-1}$
et D diagonale

On a alors $\exp(A) = \sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k \geq 0} \frac{PD^kP^{-1}}{k!} = P \sum \frac{D^k}{k!} P^{-1}$

$= P \exp(D) P^{-1}$.

$\boxed{\Rightarrow}$ On écrit la Décomposition de Dunford de A : $A = D+N$ avec $DN = ND$

On a : $\exp(A) = \exp(D)\exp(N)$

$\Rightarrow$ $\exp(N) = \exp(A)\ \exp(-D)$

↳ ces 2 mat commutent car A et D commutent

→ elles sont dc codiagzble

$\Rightarrow$ $\exp(N)$ est dzble.

On note n l'indice de nilpotence de N

On a : $\exp(N) = I_n + N + \dots + \frac{N^{n-1}}{(n-1)!}$

comme $\exp(N)$ dzble $\Rightarrow$ $\exp(N) = I_n$

et $P(X) = X + \dots + \frac{X^{n-1}}{(n-1)!}$ annule N

De plus X^n annule N $\Rightarrow$ $\boxed{n = 1}$ dc X annule N ∎