Leçon : 153 . Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

Références :
[G] Gourdon Algèbre
[OA] Objectif Agrégation
[M] Methodix Algèbre (on peut le remplacer)

Cadre : $\mathbb{K}$ un corps commutatif
E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dim $n \in \mathbb{N}^*$

I - Polynômes d'endomorphisme :

1) d'algèbre $\mathbb{K}[u]$

Déf 1 [G] : Soit $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_p X^p \in \mathbb{K}[X]$
On définit les fonctions polynômes sur $\mathcal{L}(E)$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ comme suit :
- Pour $\forall f \in \mathcal{L}(E)$, on note $P(f) = a_0 Id_E + a_1 f + \dots + a_p f^p \in \mathcal{L}(E)$
- Pour $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $P(A) = a_0 I_n + a_1 A + \dots + a_p A^p \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Déf 2 [OA] : On définit $\varphi_f : \mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E)$, $P \mapsto P(f)$ morphisme de $\mathbb{K}$-algèbre.
On définit l'algèbre des polynômes en f comme l'image de φ_f et on la note $\mathbb{K}[f]$.

Rmq 3 [G] : si $f \in \mathcal{L}(E)$, pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, on a $P(f) \circ Q(f) = (PQ)(f)$
l'ensemble $\mathbb{K}[f] = \{P(f) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$.

Lemme 4 [G] : Décomposition des noyaux :
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P = P_1 \dots P_k \in \mathbb{K}[X]$ les polynômes P_i étant premiers entre eux 2 à 2.
Alors $\ker(P(f)) = \ker P_1(f) \oplus \dots \oplus \ker P_k(f)$.

2) Le polynôme minimal de f :

Prop 5 [OA] : $\ker \varphi_f$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ non réduit à $\{0\}$
Cet idéal s'appelle l'idéal des polynômes annulateurs de f.

Rmq 6 [OA] : Comme $\mathbb{K}[X]$ est principal,

Déf 7 [OA] : On appelle le polynôme minimal de f, l'unique polynôme unitaire qui engendre $\ker \varphi_f$. On le note Π_f.

Prop 8 [OA] : Par les thm d'isomorphismes, on a : $\mathbb{K}[f] \simeq \mathbb{K}[X]/(\Pi_f)$
De plus si $\Pi_f = P_1 \dots P_k$ avec les P_i 2 à 2 premiers entre eux alors par le lemme chinois : $\mathbb{K}[f] \simeq \mathbb{K}[X]/(P_1) \times \dots \times \mathbb{K}[X]/(P_k)$

Prop 9 [?] : $\mathbb{K}[f]$ est une sous-algèbre de dimension $\deg(\Pi_f)$ et la famille $(Id, u, \dots, u^{\deg(\Pi_f)-1})$ est une base de $\mathbb{K}[f]$.

Rmq 10 [OA] : Si F est un s esp vectoriel de E stable par f, alors $\Pi_{f|F} \mid \Pi_f$

Prop 11 [OA] : Soit $E = F_1 \oplus F_2$ avec F_1 et F_2 des sous espaces de E stables par f sur lesquels on note f_1 et f_2 les restriction de f alors $\Pi_f = \text{ppcm}(\Pi_{f_1}, \Pi_{f_2})$

Prop 12 [G] : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ tq $P(f) = 0$.
si λ est valeur propre de f alors $P(\lambda) = 0$

Prop 13 [G] : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
Un scalaire λ est v p de f ssi λ est racine de son poly minimal Π_f.

3) Le polynôme caractéristique de f :

Déf 14 [OA] : On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
On définit le polynôme caractéristique de A que l'on note χ_A par : $\chi_A = \det(A - X\, id)$.

Prop 15 [OA] : Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique
On définit alors le polynôme caractéristique de f comme celui de la matrice associé dans n'importe quelle base.

Prop 16 [OA] : λ est valeur propre de f $\Leftrightarrow$ λ est racine de χ_f

Prop 17 [OA] : Par Cayley Hamilton, on a : $\chi_f(f) = 0$;
c.à.d χ_f appartient à l'idéal des polynômes annulateurs

Coro 18 [OA] : On a $\Pi_f \mid \chi_f$ et $\deg(\Pi_f) \leq n = \deg \chi_f$

Ex 19 [G] : $f \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent ssi $\chi_f(X) = (-1)^n X^n$

Déf 20 [?] : On appelle multiplicité d'une valeur propre λ, son ordre de multiplicité en tant que racine de χ_f

Prop 21 [?] : Pour $\forall$ v.p λ, $\dim \ker(f - \lambda\, id) \leq m_\lambda$
avec m_λ la multiplicité de la vp λ.

II - Polynômes d'endomorphismes : un outil pour la réduction

1) Application à la diagonalisation :

Prop 22 [OA] : Soient E un esp vect de dim finie et $f \in \mathcal{L}(E)$
les prop suivantes sont équivalentes.

i) f est diagonalisable

ii) $\exists$ un polynôme annulateur de f scindé à racines simples

iii) Π_f est scindé à racines simples

iv) χ_f est scindé et pour $\forall$ val propre λ, la dim du sous-esp propre E_λ est égale à la multiplicité de λ dans χ_f.

Ex 23 [OA] : les projecteurs sont par déf les endomorphismes $p \in \mathcal{L}(E)$ tq $p \circ p = p$.

Ainsi sont-ils annulés par $X^2 - X$ qui est scindé à racines simples. Les projecteurs sont donc tjs diagonalisables et à v.p dans $\{0, 1\}$.

Ex 24 [OA] : les symétries de E sont par déf les endomorphismes $s \in \mathcal{L}(E)$ tq $s^2 = id$, dont annulés par $X^2 - 1$.

Si car $(\mathbb{K}) \neq 2$, alors s est diagonalisable et à valeurs propres dans $\{-1, 1\}$.

. Donc l'endomorphisme de transposition $A \mapsto {}^tA$ est une symétrie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il est diag^{ble} de sous espace propre associé à la valeur propre 1 (resp -1) est l'espace des matrices sym (resp antisym).

App 25 [OA] : Cas des corps finis : si $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ alors f est diag^{ble} ssi $X^q - X$ est un polynôme annulateur de f.

2) Application à la trigonalisation :

Prop 26 [OA] : les propositions suivantes sont équivalentes :

i) f est trigonalisable

ii) $\exists$ un polynôme annulateur scindé

iii) Π_f est scindé.

iv) χ_f est scindé

App 27 [OA] : si $\mathbb{K}$ est algébriquem^t clos, alors $\forall$ endomorphisme est trigonalisable.

Ex 28 [OA] : si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, alors f est nilpotent ssi 0 est la seule vp de f.

3) Décomposition de Dunford :

Thm 29 [G] : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tq χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$.
Alors $\exists!$ couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tq :

i) d est diag^{ble}

ii) n est nilpotente

iii) $f = d + n$

iv) $d \circ n = n \circ d$

DEV 1

App 30 [G] : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tq χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$, on a :
f est diag^{ble} $\Leftrightarrow$ $\exp(f)$ diag^{ble}

Rmq 31 [G] : . d et n sont des polynômes en f
. les projecteurs spectraux sont des polynômes en f

Ex 32 : la décomposition de Dunford de $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est

$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Coex 33 [OA] :
Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, on peut décomposer $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mais ce n'est pas la déc de Dunford de A car les matrices ne commutent pas.

III - Applications :

1) Calcul des puissances et l'inverse

. On effectue la division euclidienne de X^n par P où P est un polynôme annulateur de f.

On obtient $X^n = PQ + R$ avec $\deg(R) < \deg(P)$

En particulier, on choisit $P = \chi_f$ pour obtenir : $f^n = R(f)$ avec $\deg(R) < n$

Ex 34 [HJ] : On cherche les puissances successives de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$P = X^2 - X - 2$ est un polynôme annulateur de A

On fait la division euclidienne de X^n par P.

$X^n = PQ_n + R_n$ avec $R_n = \alpha_n X + \beta_n$ d'où $A^n = \alpha_n A + \beta_n$

En particulier comme (-1) et 2 sont v.p. : $\begin{cases} (-1)^n = -\alpha_n + \beta_n \\ 2^n = 2\alpha_n + \beta_n \end{cases}$

d'où $A^n = \dfrac{2^n + (-1)^{n+1}}{3} A + \dfrac{2^n + 2(-1)^n}{3} I_n$

• Si A inversible alors on peut calculer son inverse.
En effet, $\chi_A(A) = 0$ nous donne la relation
$A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \dots + \alpha_1 A + \alpha_0 I = 0$ avec $\alpha_0 \neq 0$ car A inversible
d'où $A\left(\dfrac{A^{n-1} + \alpha_{n-1}A^{n-2} + \dots + \alpha_1 I}{-\alpha_0}\right) = I$

$\Rightarrow$ par unicité de l'inverse : $A^{-1} = \dfrac{A^{n-1} + \alpha_{n-1}A^{n-2} + \dots + \alpha_1 I}{-\alpha_0}$

Ex 35 [H] :
Pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a : $A^2 = A + 2I_n$ donc $A^{-1} = \dfrac{A - I}{2}$

Ex 36 [H] :
Pour $A = \begin{pmatrix} (0) & 1 \\ 1 & (0) \end{pmatrix}$ on a $A^2 = I_n$ donc $A = A^{-1}$

2) Commutant :

Déf 37 [G] : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
On appelle commutant de A noté $\Gamma_A := \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid AM = MA\}$
De m pour $f \in \mathcal{L}(E)$, $\Gamma_f := \{g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\}$.

Rmq 38 : $\mathbb{K}[f] \subset \Gamma_f$

Prop 39 [G] : Si A possède n valeurs propres distinctes
on a alors $\Gamma_A = \mathbb{K}[A]$

Prop 40 [Francinou Algèbre 2] :
Dans le cas général on a : $\Gamma_A = \mathbb{K}[A]$ ssi $\Pi_A = \chi_A$.

3) Exponentielle d'endomorphisme :

Déf 40 [H] :
On définit $\exp(f) = \sum_{k \geq 0} \dfrac{f^k}{k!}$

Prop 41 [H] : $\exp(f)$ est un polynôme en f

Rmq 42 [H] : • $\exp(A)$ commute avec A
• Si A et B commutent alors $\exp(A)$ et $\exp(B)$ aussi

Prop 43 [H] : Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{tr}(A))$

Thm 44 : L'exponentielle de matrices $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est surjective

DEV 2

Rmq 45 : C'est faux dans $\mathbb{R}$!
On a $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \{A^2, A \in GL_n(\mathbb{R})\}$.