NOM : Groupe I **Prénom :** Imen & Diane **date :** 17/10/19

N°Leçon : 155 **Titre de la leçon :** Endomorphismes diagonalisables en dim finie.

Références :

Cadre : $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif. E un $\mathbb{K}$-ev de dim n, $f \in \mathcal{L}(E)$.

I - Definitions et premières propriétés.

1) Eléments propres. [GOU] p.161-162

Def 1 : Soit $\alpha \in \mathbb{K}$, le scalaire α est dit valeur propre de f si $f - \alpha Id_E$ est non injective, autrement dit s'$\exists\, x \neq 0$ tq $f(x) = \alpha x$.
On dit alors que x est vecteur propre de f attaché à la valeur propre α.

Def 2 : On appelle spectre de f, noté $Sp_{\mathbb{K}}(f)$, l'ensemble de ses valeurs propres.

Def 3 : soit λ une vp de f. L'ensemble $E_\lambda = \{x \in E,\ f(x) = \lambda x\} = \mathrm{Ker}(f - \lambda Id_E)$ est un sev de E stable par f, appelé sous espace propre de f associé à la vp λ.

Thm 4 : Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des vp distinctes 2 à 2 de f. Alors les s-esp propres $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_k}$ sont en somme directe.

2) Polynômes d'endomorphisme [GOU] p.174-175 [OA] p.161, 166

Def 5 : Soit $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_p X^p \in \mathbb{K}[X]$
$\forall f \in \mathcal{L}(E)$ on note $P(f) = a_0 Id_E + a_1 f + \dots + a_p f^p \in \mathcal{L}(E)$
on note $\mathbb{K}[f] = \{P(f) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$

Rmq 6 : $\mathbb{K}[f]$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$

Prop 7 : On note $I = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(f) = 0\}$ l'idéal des polys annulateurs de f. C'est un idéal non réduit à $\{0\}$.

Thm 8 : (Lemme des noyaux)
Soit $P = P_1 \dots P_k \in \mathbb{K}[X]$, les polynômes P_i étant premiers entre eux deux à deux. Alors :
$\mathrm{Ker}\, P(f) = \mathrm{Ker}\, P_1(f) \oplus \dots \oplus \mathrm{Ker}\, P_k(f)$.

Def 9 : $\exists !$ poly unitaire π_f qui engendre I : c'est le poly min de f.

Prop 10 : Un scalaire λ est vp de f ssi $\pi_f(\lambda) = 0$

Ex 11 : • $s \in \mathcal{L}(E) \setminus \{id\}$ symétrie $\Rightarrow \pi_s = X^2 - 1$
$\Rightarrow$ si $car(\mathbb{K}) \neq 2$, $Sp(s) = \{\pm 1\}$
• $p \in \mathcal{L}(E) \setminus \{0, id\}$ projecteur $\Rightarrow \pi_p = X^2 - X$
$\Rightarrow Sp(p) = \{0, 1\}$

3) Polynôme caractéristique [GOU] p.162, 164, 167

Def 12 : On considère $A = Mat_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathcal{B}$ une base de E. On défini le poly caractéristique par $\chi_A(X) = \det(A - X I_n)$.

Ex 13 : $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ on a $\chi_A = -(X-1)(X-2)(X+4)$

Thm 14 : (Cayley-Hamilton) $\chi_f(f) = 0$ p.176-177

Cor 15 : On déduit que $\pi_f \mid \chi_f$ donc $\deg \pi_f \leq n$

Prop 16 : $\lambda \in Sp(f) \Leftrightarrow \chi_f(\lambda) = 0$

Prop 17 : λ racine de multiplicité m_λ de $\chi_p \Rightarrow \dim E_\lambda \leq m_\lambda$.

II. Diagonalisabilité.

1) Definition et critères de diagonalisabilité. [GOU] p.163-166 [OA] p.165

Def 18 : On dit que f est dzble si $\exists$ une base de vecteurs propres de f.
. On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dzble si A est semblable à une matrice diagonale.

Thm 19 : des propriétés suivantes sont équivalentes :
i) f dzble
ii) $\exists$ poly annulateur de f scindé à racines simples.

iii) π_f est scindé à racines simples.
iv) χ_f est scindé et $\forall$ vp λ la dim de E_λ est égale à la multiplicité de λ dans χ_f.

Ex 20 : Les projections et symétries sont dzbles en car $\mathbb{K} \neq 2$.

Ex 21 : En reprenant la mat A de l'ex 13, A est dzble.

Prop 22 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ dzble et F un sev de E stable par f. Alors $f|_F \in \mathcal{L}(F)$ est dzble.

Prop 23 : Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tq $f \circ g = g \circ f$. Alors :
i) Tout s-esp propre de f est stable par g (en part $\ker f$)
ii) $\mathrm{Im}\, f$ est stable par g.

Thm 24 : (Diag simultanée)
si f et $g \in \mathcal{L}(E)$ sont dzbles et commutent, $\exists$ une base commune de diagonalisa° de f et g. On dit alors qu'ils sont codzbles.

2) Endomorphismes semi-simples. [OA] p. 160 [NH2G2] p. 357, 360

Def 25 : On dit que f est semi-simple si $\forall$ sous-espace F de E stable par f, $\exists$ un supplémentaire de F stable par f.

Thm 26 : f est semi-simple $\Leftrightarrow$ $\pi_f = Q_1 \dots Q_r$ est produit de poly irréductibles unitaires distincts 2 à 2.

Prop 27 : Sur un corps alg. clos, semi-simple $\Leftrightarrow$ dzble.

Ct-ex 28 : Sur $\mathbb{R}$, les endos orthogonaux sont semi-simples mais pas dzble.

3) Endomorphismes auto-adjoints. [GOU] p. 243-244

Dans cette partie, E est supposé euclidien.

Def 29 : Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Les endos f et g sont dits adjoints si $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle f(x), y\rangle = \langle x, g(y)\rangle$ (*)
. L'endo f étant donné, $\exists$ au plus un endo g vérifiant (*). Lorsqu'$\exists$, on l'appelle adjoint de f et on le note f^*. Lorsque $f = f^*$, f est dit autoadjoint.

Thm 30 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjoint, alors $\exists$ une base orthonormée de vects propres pour f (de plus ses vps sont réelles).

Thm 31 : f est auto-adjoint ssi la mat qui le repres. dans une base ortho est hermitienne.

Ex 32 : . $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid S = {}^tS\}$
. $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \{S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid S = {}^tS$ et $\lambda > 0\ \forall \lambda \in Sp(S)\}$.

Prop 33 : L'appli exp : $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéo.] DEV. 1

Appli 34 : $O(p,q) \simeq O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$] DEV. 2

III. Applications

1) Étude topologique. [OA] p. 179 [CVA] p. 48→51

Etudions les props topologiques des s-ens suivants de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:
- $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des mat dzbles
- $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ — — — trigozles
- $\mathcal{C}_n(\mathbb{K})$ — — — dzbles à vp distinctes.

Rmq 35 : $\mathcal{C}_n(\mathbb{K}) \subset \mathcal{D}_n(\mathbb{K}) \subset \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

CAS $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Prop 36 : $\mathcal{C}_n(\mathbb{C})$ est un ouvert dense et connexe par arc ds $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Prop 37 : $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ est dense ds $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

App 38 : Preuve de Cayley Hamilton en $\mathbb{C}$.

App 39 : L'appli $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}_n[X]$, $M \mapsto \pi_M$ n'est pas C^0.

CAS $\mathbb{K}=\mathbb{R}$

Rmq 40 : $D_n(\mathbb{R})$ n'est pas dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$\hookrightarrow$ ct-ex : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Prop 41 : $\overline{D_n(\mathbb{R})} = T_n(\mathbb{R})$

2) Cas de $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ [NH2G2] (Tome 2 ?)

Prop 42 : f dzble $\iff f^q = f$

Prop 43 : Le nombre d'endos dzbles de $\mathcal{L}(E)$ est :

$$\sum_{\substack{i_1 \dots i_q \\ i_1+\dots+i_q=n}} \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{\prod_{k=1}^{q} |GL_{i_k}(\mathbb{F}_q)|}$$

3) Décomposition de Dunford. [OA] p. 160, 164 [CVA] p. 58

Thm 44 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tq χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$. Alors $\exists! (d,n) \in (\mathcal{L}(E))^2$ avec d dzble et n nilpotent tq
i) $f = d+n$
ii) $d \circ n = n \circ d$

Appli 45 : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, χ_A scindé. A dzble $\iff \exp(A)$ dzble.

DEV. 3

Ct-ex 46 : La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable mais $\exp A = I_2$ est diagonalisable.

Thm 47 : (Dunford généralisé)
Soit E un $\mathbb{R}$-ev et $f \in \mathcal{L}(E)$. $\exists!$ couple $(s,n) \in (\mathcal{L}(E))^2$ tq :
i) s est semi-simple et n nilpotent
ii) $f = s+n$ et $s \circ n = n \circ s$

App 48 (Newton pour la décomposition de Dunford).
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, χ_A son poly caract et $D+N$ sa décomposi° de Dunford. Pose $P = \frac{\chi_A}{\chi_A \wedge \chi_A'}$, alors la suite (A_k) donnée par $\begin{cases} A_0 = A \\ A_{k+1} = A_k - P(A_k)P'(A_k)^{-1} \end{cases}$ est bien déf, stationnaire et tend vers D.

4) Calcul de puissance et résolution de systèmes. [GRI] p. 170-171

Puissance : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, suppose A dzble. $\exists A'$ diagonale et $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tq $A = PA'P^{-1}$.
Ainsi $A^k = P(A')^k P^{-1}$, or si $A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & (0) \\ (0) & \lambda_n \end{pmatrix}$ on a $(A')^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & (0) \\ (0) & \lambda_n^k \end{pmatrix}$ et A^k se calcule facilement.

Ex 49 : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $A^k = \begin{pmatrix} 2(2^k) - 3^k & 2^k - 3^k \\ -2\cdot 2^k + 2\cdot 3^k & -2^k + 2\cdot 3^k \end{pmatrix}$

Résolution de système.
Illustrons cela sur un exemple. Il s'agit de déterminer $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ tq (*) $\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 4v_n \end{cases}$ et tq $\begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = 1 \end{cases}$

Pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, (*) s'écrit $X_{n+1} = AX_n$ avec A de l'ex 49.
Par recurrence, $X_n = A^n X_0$ où $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
$\rightarrow$ On est ramené au calcul des puissances A^n.
Par ex 49 : $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 2^n - 3\cdot 3^n \\ -5\cdot 2^n + 6\cdot 3^n \end{pmatrix}$

Refs : [GOU] Gourdon, Algèbre, 2e édition.
- [OA] Objectif Agrégation, 2e édition.
- [CVA] Carnet de voyage en Algébrie.
- [GRI] Grifone, Algèbre linéaire, 6e édition
- [NH2G2] Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries.

$\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme

Rappel : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$

#1 : Bien définie et continue.

Si $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, le théorème spectral fournit $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tq :
$S = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$.

Alors $\exp(S) = \exp\left(P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}\right) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ car $\forall i \in [\![1,n]\!]$ $e^{\lambda_i} > 0$ et P est orthogonale. Donc exp envoie bien $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, de plus elle est C^0 par restriction.

#2 : Surjectivité.

Soit $T \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ alors $T = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $\lambda_i > 0$ et $P \in O_n(\mathbb{R})$.

Soit $S = P \begin{pmatrix} \ln \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \ln \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

On a $\exp(S) = T$, d'où la surjectivité.

#3 : Injectivité.

Soient $A, A' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tq $\exp A = \exp A'$ et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les vp de A.
Soit Q un polynôme interpolateur de Lagrange tq $Q(e^{\lambda_i}) = \lambda_i$ $\forall i \in [\![1,n]\!]$.
On sait que A' commute avec $\exp(A')$. Alors A' commute avec
$Q(\exp A') = Q(\exp A) = A$. (En effet, $Q(\exp A) = Q\left(P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}\right)$

$$= P \begin{pmatrix} Q(e^{\lambda_1}) & & \\ & \ddots & \\ & & Q(e^{\lambda_n}) \end{pmatrix} P^{-1}$$

$= A$)

Par diagonalisation simultanée, $\exists R \in Gl_n(\mathbb{R})$ tq :

$A = R \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} R^{-1}$ et $A' = R \begin{pmatrix} \lambda_1' & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n' \end{pmatrix} R^{-1}$

$\Rightarrow \exp A = R \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} R^{-1}$ et $\exp A' = R \begin{pmatrix} e^{\lambda_1'} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n'} \end{pmatrix} R^{-1}$

$\exp A = \exp A' \Rightarrow R \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} R^{-1} = R \begin{pmatrix} e^{\lambda_1'} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n'} \end{pmatrix} R^{-1}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1'} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n'} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow e^{\lambda_i} = e^{\lambda_i'}$ $\forall i \in [\![1,n]\!] \Rightarrow \lambda_i = \lambda_i'$ $\forall i \in [\![1,n]\!]$ par injectivité de exp sur $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow A = A'$.

#4 : Bicontinuité

Lemme : Soit $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $|||M|||_2 = \rho(M)$

Soit $(B_p)_{p\in\mathbb{N}} = (\exp(A_p))_{p\in\mathbb{N}}$ tq $B_p \xrightarrow[p\to\infty]{} B = \exp A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Mq : $A_p \xrightarrow[p\to\infty]{} A$

- La suite $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ étant convergente, elle est bornée pour $|||\cdot|||_2$. Donc tous les spectres de B_p sont majorées par une constante $c > 0$.

- De plus $\begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M^{-1} \end{array}$ est C^0 et $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$,

donc $B_p^{-1} \xrightarrow[p\to\infty]{} B^{-1}$.

on obtient alors que les spectres de B_p^{-1} sont majorés par une constante, or $\mathrm{Spec}\, B_p^{-1} = \{\frac{1}{\lambda}, \lambda \in B_p\}$, donc tous les spectres de B_p sont minorées par un $c' > 0$.

Toutes les valeurs propres de (B_p) sont contenues dans le compact $[c', c] \subset]0, \infty[$, donc les valeurs propres de (A_p) sont dans $[\ln c', \ln c]$ compact de $\mathbb{R}$, par image C^0 d'un compact. Ainsi, (A_p) est bornée pour $|||\cdot|||_2$.

- Dans un evn de dimension finie, une suite bornée qui n'a qu'une valeur d'adhérence convergence vers cette va.

Reste à mq A est l'unique valeur d'adhérence de (A_p).

Soit $(A_{\varphi(p)})$ une suite extraite de (A_p) qui cv vers $\bar{A} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

$\forall p \geq 0$, $\exp(A_{\varphi(p)}) = B_{\varphi(p)}$

$$\exp \bar{A} = \exp \lim_{p\to\infty} A_{\varphi(p)} = \lim_{p\to\infty} \exp(A_{\varphi(p)}) = \lim_{p\to\infty} B_{\varphi(p)} = B = \exp A$$

$\Rightarrow \bar{A} = A$ par injectivité.

$\Rightarrow A_p \xrightarrow[p\to\infty]{} A$. $\boxtimes$

Développement 2 : **Leçon n°** 155

Réf. Caldero Germoni H2G2 p. 244

ETUDE DE $O(p,q)$:

Cadre : On note $O(p,q)$ le sous groupe de $Gl_{p+q}(\mathbb{R})$ des isométries pour la forme quadratique $q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2$.

On note $I_{(p,q)} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$ et on rappelle que $M \in O(p,q) \Leftrightarrow M I(p,q) {}^tM = I_{(p,q)}$

Théorème :

Soient $p,q \geq 1$, alors $\exists$ un homéomorphisme : $O(p,q) \simeq O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$

ETAPE 1 : Mq $O(p,q) \simeq (O(p,q) \cap O(n)) \times (O(p,q) \cap S_n^{++})$.

Soit $M \in O(p,q)$, alors par décomposit° polaire $M = OS$ avec $O \in O(n)$ et $S \in S_n^{++}$ pour $n = p+q$.

Mq $O, S \in O(p,q)$

On pose $T = {}^tMM$, alors $S^2 = T$

On a $M \in O(p,q)$ dc $M I_{(p,q)} {}^tM = I_{(p,q)}$

dc ${}^tM^{-1} I_{(p,q)} M^{-1} = I_{(p,q)}$ d'où ${}^tM^{-1} \in O(p,q)$ et ainsi ${}^tM \in O(p,q)$

Donc $S^2 = T = {}^tMM \in O(p,q)$.

A présent, on sait que $T \in S_n^{++}$ donc comme exp réalise un homéomorphisme de S_n sur S_n^{++}, on a l'existence de $U \in S_n$ tq $T = \exp(U)$

Alors
$$\begin{aligned}
T \in O(p,q) &\Leftrightarrow T I_{(p,q)} {}^tT = I_{(p,q)} \\
&\Leftrightarrow {}^tT = I_{(p,q)} T^{-1} I_{(p,q)} \\
&\Leftrightarrow {}^t\exp(U) = I_{(p,q)} \exp(U)^{-1} I_{(p,q)} \\
&\Leftrightarrow \exp({}^tU) = \exp(-I_{p,q} U^{-1} I^{-1}_{(p,q)}) \\
&\Leftrightarrow {}^tU = U = -I_{(p,q)} U I^{-1}_{(p,q)} \quad \text{par bij de exp} \\
&\Leftrightarrow U I_{(p,q)} + I_{(p,q)} U = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{U}{2} I_{(p,q)} + I_{(p,q)} \frac{U}{2} = 0 \\
&\Leftrightarrow {}^t\exp\left(\frac{U}{2}\right) = I_{(p,q)} \exp\left(\frac{U}{2}\right)^{-1} I^{-1}_{(p,q)} \quad \text{en remontant les calculs cô précédemment}
\end{aligned}$$

Comme $\exp(U/2) \in S_n$ et $\exp(U/2)^2 = T$, par unicité de la racine carré, $S = \exp(U/2)$

et donc $S I_{(p,q)} {}^tS = I_{(p,q)}$

$\Rightarrow S \in O(p,q)$ et dc $O \in O(p,q)$

De plus, on sait que la décomposit° polaire induit l'homéo : $Gl_n \simeq O(n) \times S_n^{++}$

On a donc l'homéo $O(p,q) \simeq (O(p,q) \cap O(n)) \times (O(p,q) \cap S_n^{++})$

ETAPE 2 : Etudier $O(p,q) \cap O(n)$:

Soit O dans ce groupe, alors $O I_{(p,q)} {}^tO = I_{(p,q)}$ et $O {}^tO = I_n$.

Si on écrit $O = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, alors :

$$\begin{cases} {}^tAA - {}^tBB = I_p \\ A^tC - B^tD = 0 \\ C^tA - D^tB = 0 \\ C^tC - D^tD = -I_q \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} A^tA + B^tB = I_p \\ A^tC + B^tD = 0 \\ C^tA + D^tB = 0 \\ C^tC + D^tD = I_q \end{cases}$$

On en déduit $B^tB = 0$, dc comme $(M,N) \to tr(M^tN)$ est un produit scalaire, on a $B=0$.

De m̂, on a $C=0$. ainsi $A \in O(p)$ et $D \in O(q)$

On en déduit $O(p,q) \cap O(n) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, A \in O(p), D \in O(q) \right\} \simeq O(p) \times O(q)$

ETAPE 3: Etudier $O(p,q) \cap S_n^{++}$:

On pose $L = \{ U \in M_n(\mathbb{R}) \mid U I(p,q) + I(p,q) U = 0 \}$

Alors (on a vu plus haut) que exp réalise une bijection entre $L \cap S_n$ et $O(p,q) \cap S_n^{++}$

Or l'exp réalise un homéo entre S_n et S_n^{++} dc elle induit l'homeo :

$O(p,q) \cap S_n^{++} \simeq L \cap S_n$.

Soit $U = \begin{pmatrix} A & B \\ {}^tB & D \end{pmatrix} \in S_n$ avec A, D symétriques, alors comme

$U I(p,q) + I(p,q) U = 2 \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ on a : $U \in L \Leftrightarrow A = 0$ et $D = 0$

Il en découle que $L \cap S_n = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ {}^tB & 0 \end{pmatrix}, B \in M_{p,q} \right\}$ et on en déduit

l'homeo $L \cap S_n \simeq \mathbb{R}^{pq}$

D'où

$O(p,q) \simeq (O(p,q) \cap O(n)) \times (O(p,q) \cap S_n^{++}) \simeq O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$

■