NOM : DAL MOLIN, MORIANI, MASSON **Prénom :** Guillaume, Alex, Benjamin **date :** 06/11/2019

N°Leçon : 157 **Titre de la leçon :** Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents

Références :

Soit $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}$_espace vectoriel de dimension fini n, $u \in End(E)$. Quitte à choisir une base, $End(E) \simeq \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on notera donc par A la matrice de u dans une certaine base.

I Endomorphismes trigonalisables

Définition 1 : u est dit trigonalisable si il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieur.

Définition 2 : A est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure

Remarque 3 : u diagonalisable $\Longrightarrow$ u trigonalisable mais la réciproque est fausse, ex : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Théorème 4 : Les propositions suivantes sont équivalantes :
- (i) u est trigonalisable
- (ii) μ_u est scindé sur $\mathbb{K}$
- (iii) χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$
- (iv) il existe un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ annulateur de u, scindé

Corollaire 5 : si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable

Lemme 6 : Soit F un sous espace vectoriel de E, stable par u, et v, l'endomorphisme induit par u sur F. Alors $v \in End(F)$, et $\chi_v \mid \chi_u$ et u trigonalisable $\Rightarrow$ v trigonalisable

Théorème 7 : (Trigonalisation simultané) : Soit (u_i) une famille d'endomorphismes trigonalisables. Si, $\forall i,j$, $u_i \circ u_j = u_j \circ u_i$, Alors les u_i sont cotrigonalisables, i.e. $\exists$ une base de E tel que $\forall i$, $Mat_B(u_i)$ est triangulaire.

Corollaire 8 : Si u et v sont trigonalisables et commutent, Alors $u+v$ et $u \circ v$ sont trigonalisabl.

Pour parler de topologie, on prend maintenant $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Définition 9, on note : $D_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonalisables
$T_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices trigonalisables
$C_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonalisable à valeurs propres distinctes

Remarque 10 : $C_n(\mathbb{K}) \subset D_n(\mathbb{K}) \subset T_n(\mathbb{K}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Théorème 11 : $\overline{C_n(\mathbb{K})} = T_n(\mathbb{K})$ et $\overset{\circ}{D_n}(\mathbb{K}) = C_n(\mathbb{K})$

Corollaire 12 :
- $T_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- $D_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = T_n(\mathbb{C})$

II Endomorphismes nilpotents

Définition 13 : u est dit nilpotent si $\exists k \geq 1$ tq $u^k = 0$

Définition 14 :
- A est dite nilpotente si $\exists k \geq 1$ tq $A^k = 0$
- l'indice de nilpotente, $\nu_u = \min\{p \in \mathbb{N},\ u^p = 0\}$

Théorème 15 : Si u est nilpotent d'indice r, alors $\mu_u = X^r$ et dans ce cas $r \leq n$

Théorème 16 : Les propositions suivantes sont équivalentes :
- (i) u est nilpotent
- (ii) $\chi_u = X^n$
- (iii) u est trigonalisable et admet 0 pour valeur propre
- (iv) 0 est la seule valeur propre de u dans toute extension algebrique de $\mathbb{K}$

contre-exemple 17 : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 0 est la seule valeur propre sur $\mathbb{R}$, or A n'est pas nilpotente.

Théorème 17 : $f, g \in End(E)$, si f et g commutent et sont nilpotents alors $f+g$ et $f \circ g$ sont nilpotents.

Remarque 18 : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est une somme de matrices nilpotente, mais n'est pas nilpotente (les éléments de la somme ne commutent pas)

Théorème 19 : Si μ est un endomorphisme inversible et f nilpotent et $u \circ f = f \circ u$, Alors $u - f$ est inversible

Corollaire 20 : Si f est nilpotent, alors $Id_E + f$ est inversible.

Application 21 : Soit $E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ et $T_{ij} = I_n + \lambda E_{ij}$ $(i \neq j)$
Alors T_{ij} est inversible et $T_{ij}^{-1} = I_n - \lambda E_{ij}$

Théorème 22 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors A nilpotente $\Longleftrightarrow$ $tr(A^k) = 0$ $\forall k \in [\![1, n]\!]$

Théorème 23 : $\mathcal{N}(E) = \{f \in \mathcal{L}(E),\ f \text{ nilpotent}\}$ alors $\mathcal{N}(E)$ est un cône et $\mathrm{Vect}(\mathcal{N}(E)) = \{f \in \mathcal{L}(E),\ \mathrm{tr}(f) = 0\}$

Théorème 24 : en dimension 2, pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

M est nilpotente ssi $a = -d$ et $da - bc = 0$,
on peut représenter le cône $\mathcal{N}$ dans l'espace vectoriel de dimension 3 des matrice de trace nulle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ par l'équation $a^2 - bc = 0$

Théorème 25 : $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$, le cardinal n_d des matrices carrés nilpotentes de taille d sur $\mathbb{K}$ vaut $n_d = q^{d(d-1)}$ (DEV 1)

Lemme 26 : (Essouflement des noyaux)
$u \in \mathcal{N}(E)$, on note $\forall i \in \mathbb{N}$, $K_i := \mathrm{Ker}(u^i)$
Alors $\{0\} = K_0 \subsetneq K_1 \subset \dots \subset K_m = E$ avec essouflement :
$\forall i \in [\![1, m-1]\!]$, $0 \leq \dim(K_{i+1}) - \dim(K_i) \leq \dim(K_i) - \dim(K_{i-1})$

corollaire 27 : la suite des noyaux itérés est strictement croissante jusqu'au rang $m \in \mathbb{N}^*$, où elle stationne, m est exactement l'indice de nilpotence de u

III Application à la réduction

Définition 28 : on appelle diagramme de young une partie Y de $(\mathbb{N}^*)^2$ telle que $\forall (i,j) \in Y$, $(k,l) \in Y$ pour $\begin{cases} 1 \leq k \leq i \\ 1 \leq l \leq j \end{cases}$

Théorème 29 : (Jordan) La classe de similitude d'une matrice nilpotente est caractérisé par ~~sont~~ son diagramme de young.
on associe à $A \in \mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ une matrice de la forme
$B = \begin{pmatrix} J_{\nu_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{\nu_k} \end{pmatrix}$ où $J_l = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ est le bloc de jordan de taille l et $\nu = (\nu_i)_{i \in [\![1,k]\!]}$ est la partition duale de $\lambda = (\lambda_i)$ avec $\lambda_i := \dim(K_i) - \dim(K_{i-1})$

Lemme 30 : (des noyaux) Soit $(P_i)_{i \in [\![1,k]\!]}$ une famille de polynômes premier entre eux deux à deux, Soit $P = \prod_{i=1}^{k} P_i$ alors
$\mathrm{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(P_i(u))$

Théorème 31 : (décomposition de Jordan - Chevalley)
Si χ_u est scindé, alors il existe un unique couple (d, n) d'endomorphisme de E avec :
(i) d diagonalisable, n nilpotent
(ii) $u = d + n$ et $d \circ n = n \circ d$
de plus d et n sont des polynôme en u. (DEV 2)

Algorithme 32 : (Methode de Newton pour la décomp de J-C.) $\mathrm{car}(\mathbb{K}) = 0$.
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de polynôme caractéristique χ_A et de décomposition de J.C, $A = D + N$. On pose $P = \frac{\chi_A}{\chi_A \wedge \chi_A'}$ et l'on considère la suite de matrices (A_n) donnée par $A_0 = A$ et $A_{n+1} = A_n - P(A_n) P'(A_n)^{-1}$.
cette suite est bien définie, stationnaire et tend vers D.

Application 33 : calcule d'une puissance d'un endomorphisme à polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{K}$. Soit A la matrice de cett endomorphisme dans une certaine base.
$A = D + N$, $A^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} D^{k-i} N^i$ donc $\forall k \geq n_0$ l'indice de nilpotence de N, $A^k = \sum_{i=0}^{n_0 - 1} \binom{k}{i} D^{k-i} N^i = D^k + N\left(\sum_{i=1}^{n_0-1} \binom{k}{i} D^{k-i} N^{i-1}\right)$

Application 34 : (exponentielle) $u \in \mathrm{End}(E)$, χ_u scindé
$e^u = e^d e^n = e^d + n' e^d =$ où n' est nilpotent

Lemme 35 : (Fitting) La suite croissante des sous espaces vectoriels $(\mathrm{Ker}(u^k))_{k \geq 0}$ et la suite décroissante des sous espaces vectoriels $(\mathrm{Im}(u^k))_{k \geq 0}$ Stationnent à partir d'un certains rang n_0 et on a
$E = \mathrm{Ker}(u^{n_0}) \oplus \mathrm{Im}(u^{n_0})$ de plus :
Si v (resp. w) est l'endomorphisme induit sur $\mathrm{Ker}(u^{n_0})$ (resp. $\mathrm{Im}(u^{n_0})$) alors v est nilpotent et w est un automorphisme

Théorème 36 : (Jordan) : Si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$, on note $\chi_u = \prod_{i=1}^{k} (x - \lambda_i)^{\alpha_i}$ $\lambda_i \neq \lambda_j$ Alors il existe une base $\underline{b}$ de E dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\underline{b}}(u)$ est diagonale par bloc de blocs
$A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & \delta_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \delta_{\alpha_i - 1} \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}$ de taille α_i avec $\delta_k \in \{0, 1\}$

Cône Nilpotent.

E un espace vectoriel de dimension d sur $\mathbb{F}_q$
on cherche à compter m_d le nombre de matrice de taille $d \times d$ nilpotante sur $\mathbb{F}_q$

Soit $H = \{(F, G, v, w) \text{ tq } F \oplus G = E, v \text{ nilpotent sur } F, w \text{ automorphisme sur } G\}$

Soit $u \in End(E)$, $\begin{cases} (Ker(u^k))_{k \geq 0} \nearrow \\ (Im(u^k))_{k \geq 0} \searrow \end{cases}$ au sens de l'inclusion et donc stationnaire à partir d'un certain rang ($\dim(E) < \infty$)

ce rang est le même pour les deux suites
car si $Ker(u^k) = Ker(u^{k+1})$ alors $Im(u^k) = Im(u^{k+1})$ par la formule du rang.
on note ce rang p.

Soit $x \in Ker(u^p) \cap Im(u^p)$, $x = u^p(y)$ et $u^p(x) = 0 = u^{2p}(y)$
donc $y \in Ker(u^{2p}) = Ker(u^p)$ donc $x = u^p(y) = 0$ donc $Ker(u^p) \cap Im(u^p) = \{0\}$
et $\dim(Ker(u^p)) + \dim(Im(u^p)) = \dim(E)$ par le rang donc
$Ker(u^p) \oplus Im(u^p) = E$, $\forall x \in E$, $x = x_K + x_I$

* $x \in Ker(u^p)$, $u^p(u(x)) = u(u^p(x)) = u(0) = 0$ donc $u(x) \in Ker(u^p)$, donc u stabilise $Ker(u^p)$

* $x \in Im(u^p)$, $\exists y$ tq $x = u^p(y)$, $u(x) = u(u^p(y)) = u^p(u(y))$
donc $u(x) \in Im(u^p)$ ainsi u stabilise $Im(u^p)$

on note $\begin{cases} u_K = u_{Ker(u^p)} : Ker(u^p) \longrightarrow Ker(u^p), & x_K \longmapsto u(x_K) \\ u_I = u_{Im(u^p)} : Im(u^p) \longrightarrow Im(u^p), & x_I \longmapsto u(x_I) \end{cases}$

$u_K^p(x) = 0$ car $x \in Ker(u^p)$ donc u_K nilpotent,

u_I est un endomorphisme et $Im(u_{Im(u^p)}) = Im(u^{p+1}) = Im(u^p)$
donc u_I est surjective ainsi u_I est un automorphisme.

$\forall u \in End(E)$ on a donc la décomposition de fitting $(Ker(u^p), Im(u^p), u_K, u_I)$
de plus pour (F, G, v, w), tq $F \oplus G = E$, v nilp et w automoph unique
on peut associer un unique $u \in End(E)$ comme il suit : $x \underset{!}{=} x_F + x_G$
et $u(x) = v(x_F) + w(x_G)$ ainsi on a bijection entre $End(E)$ et H
ainsi $|End(E)| = \# H = \sum m_{k,d}\, m_k\, |GL_{d-k}(\mathbb{F}_q)|$ avec $m_{k,d}$ le nombre de couple de sous espace (F, G) tq $F \oplus G = E$.

$$GL_d(\mathbb{F}_q) \curvearrowright \{(F,G) \mid F \oplus G = E\ ,\ \dim(F)=k\} = B$$

et l'action est transitive donc une seule orbite, B.

$$\text{ainsi } \# B = \frac{|GL_d(\mathbb{F}_q)|}{|GL_k(\mathbb{F}_q)|\,|GL_{d-k}(\mathbb{F}_q)|} = \frac{g_d}{g_k g_{d-k}}$$

$$\text{de plus } |\mathrm{End}(E)| = q^{d^2} = \sum_{k=0}^{d} \frac{g_d m_k}{g_k}$$

$$\text{ainsi } \frac{q^{d^2}}{g_d} = \sum_{k=0}^{d} \frac{m_k}{g_k}$$ Vrai pour tout d et donc aussi en $d-1$

$$\Rightarrow \frac{q^{d^2}}{g_d} - \frac{q^{(d-1)^2}}{g_{d-1}} = \frac{m_d}{g_d} \quad \text{donc } m_d = \cancel{g}\, q^{d^2} - q^{(d-1)^2} \frac{g_d}{g_{d-1}}$$

$$\text{or } g_d = q^{\frac{d(d-1)}{2}} (q^d - 1)(q^{d-1} - 1) \cdots (q-1)$$

$$\text{ainsi } \frac{g_d}{g_{d-1}} = (q^d - 1)\, q^{d-1}$$

$$\text{et donc } m_d = q^{d^2} - q^{d^2 - 2d + 1 + d - 1} (q^d - 1)$$

$$= q^{d^2} - q^{d^2 - d} (d^d - 1)$$

$$= \cancel{q^{d^2}} - \cancel{q^{d^2}} + q^{d^2 - d}$$

$$= q^{d(d-1)}$$

Théorème : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, tq χ_f scindé sur $\mathbb{K}$.
Il existe alors un unique couple (d, n) d'endo. tels que :
(i) d diagonalisable, n nilp.
(ii) $f = d + n$ et $d \circ n = n \circ d$
De plus, d et n sont des polynomes en f.

Pour ce faire, on démontre la
Proposition : Soit $f \in L(E)$, $F \in \mathbb{K}[X]$ polynome annulateur de f.
$F = \beta M_1^{\alpha_1} \cdots M_s^{\alpha_s}$ décompo. en facteurs irréd. Pour tout i, notons
$N_i = \operatorname{Ker} M_i^{\alpha_i}(f)$. On a alors $E = N_1 \oplus \cdots \oplus N_s$ et pour tout i,
la projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$ est un polynome en f.

Preuve de la proposition : ⊛ $E = N_1 \oplus \cdots \oplus N_s$ par le lemme des noyaux. $\forall i$, notons $Q_i = \prod_{j \neq i} M_j^{\alpha_j}$ $\operatorname{pgcd}(Q_1, \dots, Q_s) = 1$ donc par Bezout, il existe $U_1, \dots, U_s \in \mathbb{K}[X]$ tels que $U_1 Q_1 + \cdots + U_s Q_s = 1$
D'où $Id_E = U_1(f) \circ Q_1(f) + \cdots + U_s(f) \circ Q_s(f)$.
$\forall i$, notons $P_i = U_i Q_i$ et $p_i = P_i(f)$. On a $Id = \sum_{i=1}^{s} p_i$ $(*)$
De plus, $\forall i \neq j$, $F \mid Q_i Q_j$ donc $p_i \circ p_j = Q_i Q_j(f) \circ U_i U_j(f) = 0$ $(**)$
D'après $(*)$, $\forall i$ $p_i = \sum_{j=1}^{s} p_i \circ p_j$ et d'après $(**)$ $p_i = p_i^2$
d'où p_i projecteurs.

⊛ Mq $\forall i$, $\operatorname{Im} p_i = N_i$: Soit $y = p_i(x) \in \operatorname{Im} p_i$. On a :
$$M_i^{\alpha_i}(f)(y) = M_i^{\alpha_i}(f)(p_i(x))$$
$$= M_i^{\alpha_i}(f) \circ P_i(f)(x) = \frac{1}{\beta} U_i(f) \circ F(f)(x) = 0$$
ce qui prouve que $\operatorname{Im} p_i \subset \operatorname{Ker} M_i^{\alpha_i}(f) = N_i$.
Inclusion réciproque : Soit $x \in \operatorname{Ker} M_i^{\alpha_i}(f)$. D'après $*$,
$$x = p_1(x) + \cdots + p_s(x)$$
$\forall j \neq i$, $p_j(x) = U_j Q_j(f)(x) = 0$ car $M_i^{\alpha_i}$ divise Q_j. D'où $x = p_i(x) \in \operatorname{Im} p_i$
donc $\operatorname{Im} p_i = N_i$.

⊛ Mq $\forall i$, $\operatorname{Ker} p_i = \bigoplus_{j \neq i} N_j$.

"$\supseteq$" $\forall j \neq i$, $N_j \subset \operatorname{Ker} p_i$ car si $x \in N_j$, $p_i(x) = U_i(f) \circ Q_i(f)(x) = 0$
car $M_j^{\alpha_j} \mid Q_i$.
d'où $\bigoplus_{j \neq i} N_j \subseteq \operatorname{Ker} p_i$

"$\subseteq$" Soit $x \in \operatorname{Ker} p_i$, $x = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{s} p_j(x)$ d'après $(*)$ donc $x \in \bigoplus_{j \neq i} N_j$

Au final $\operatorname{Ker} p_i = \bigoplus_{j \neq i} N_j$

et $p_i = U_i Q_i(f)$ polynome en f. □

Preuve de Dunford:

Existence: $\chi_f = (-1)^n \prod_{i=1}^{s} (X-\lambda_i)^{\alpha_i}$ et $\forall i$, notons $N_i := \mathrm{Ker}(f-\lambda_i)^{\alpha_i}$.

On applique la proposit° précédente avec $F = \chi_f$ et $\forall i$, $M_i = (X-\lambda_i)$.

Avec les mêmes notations, $\forall i$, $p_i = P_i(f)$ est le projecteur sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j\neq i} N_j$. On pose $d = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i p_i$ (et donc d diagonalisable)

et $n = f - d$ $\quad n = \sum_{i=1}^{s} (f-\lambda_i Id) \circ p_i$

Or p_i projecteurs, $p_i \circ p_j = 0$ si $i \neq j$ et p_i commutent avec f donc par récurrence sur q, $\forall q \in \mathbb{N}^*$, $n^q = \sum_{i=1}^{s} (f-\lambda_i Id)^q p_i$

Or si $q = \sup(\alpha_i)$, $(f-\lambda_i Id)^q p_i = ((X-\lambda_i)^q P_i)(f) = 0$ car $\chi_f \mid (X-\lambda_i)^q P_i$

donc $n^q = 0$.

Unicité: Soit (d', n') un autre couple vérifiant (i) et (ii)

d' et n' commutent avec d et n polynômes en $\boxed{f = d' + n'}$.

ainsi d et d' dzables dans une même base. D'où $d - d'$ dzable.

Comme $d - d' = n' - n$ nilpotente, et dzable, ~~elle~~ cet endo. est nul

d'où $d = d'$, $n = n'$. $\square$