Concours : Agrégation externe spéciale

Section : Mathématiques

Session 2017

Rapport de jury présenté par : Thierry Goudon

Président du jury

Table des matières

Chapitre 1

Déroulement du concours et statistiques

1.1 Déroulement du concours

Le programme du concours spécial reprend à l'identique celui du concours standard. Il est publié sur le site www.devenirenseignant.gouv.fr/. Le concours comprend une seule épreuve écrite d'admissibilité et trois épreuves orales d'admission : une épreuve de mathématiques qui couvre l'intégralité du programme (sans distinguer les thèmes d'algèbre-géométrie et ceux d'analyse-probabilités) ; une épreuve de modélisation, et une épreuve de mise en perspective didactique d'un dossier de recherche qui est spécifique à ce concours [1]. Les candidats ont le choix entre quatre options

— probabilités et statistiques,
— calcul scientifique,
— algèbre et calcul formel,
— informatique,

qui ne diffèrent que par l'épreuve de modélisation. Comme pour le concours standard, le classement est indépendant de l'option ; le choix de cette option doit être uniquement guidé par les goûts et les compétences des candidats.

L'épreuve écrite de l'agrégation externe spéciale de mathématiques 2017 s'est déroulée le jeudi 23 mars 2017. La liste d'admissibilité a été publiée le vendredi 12 mai 2017. Les épreuves d'admission se sont tenues du lundi 19 juin au mardi 4 juillet 2017. La liste d'admission a été rendue publique le mercredi 5 juillet 2017. Les épreuves orales du concours spécial étaient organisées concomitamment à celles du concours standard de l'agrégation externe à Lille (au lycée Pasteur). Le jury et les candidats y ont trouvé d'excellentes conditions de travail et ont profité d'un accueil chaleureux et dévoué.

Les candidats admissibles ont reçu une convocation papier, indiquant les trois jours de passage prévus pour leurs épreuves d'admission. Toutefois, pour connaître les horaires précis d'interrogation, il fallait se connecter sur le site sécurisé de l'agrégation de mathématiques, en indiquant son numéro de candidat : cette procédure permet de confirmer la volonté de participer aux épreuves. L'application a été fermée la veille du début des oraux. Les candidats qui n'avaient pas édité leurs horaires étaient, par défaut, invités à se présenter à 6h30 le premier jour de leur convocation sur les lieux du concours, sous peine d'être déclarés non présents. Cette procédure sera reconduite l'an prochain. De plus, pour l'épreuve de mise en perspective didactique d'un dossier recherche, les candidats devaient faire parvenir dix jours avant le début des épreuves un document au format PDF à une adresse électronique dédiée.

Ce rapport est prioritairement destiné aux futurs candidats ainsi qu'aux centres de préparation et à leurs intervenants. Sa lecture, qui doit être accompagnée d'une consultation attentive du rapport

1. Tout au long de ce rapport, la description des épreuves reprend les intitulés des épreuves tels qu'ils sont donnés dans l'arrêté du 28 juin 2016. Toutefois le lecteur ne doit avoir aucun doute sur le fait que les mathématiques sont bien au cœur de ces trois épreuves. En particulier, pour rappeler une mise en garde détaillée dans le rapport du concours externe standard, aborder les enjeux de modélisation *mathématique* ne peut se concevoir comme une concession faite à la rigueur de l'exposition.

du concours standard, permettra aux préparateurs d'adapter au mieux leurs enseignements, et aux candidats de bien calibrer leurs efforts. Il décrit les insuffisances les plus marquantes qui ont pu être relevées chez les candidats qui n'ont pas été reçus ; il souligne aussi des qualités qui ont été repérées dans les prestations de cette session. Il détaille précisément les attendus du jury et relève certains éléments spécifiques observés chez les candidats à ce concours spécial. Le jury insiste sur le fait qu'il convient tout d'abord de faire preuve de bases solides.

Le concours externe spécial de l'agrégation a pour vocation de recruter des professeurs agrégés destinés à exercer dans l'enseignement secondaire (lycées d'enseignement général et technologique et, exceptionnellement, collèges) ou dans l'enseignement supérieur (universités, instituts universitaires de technologie, grandes écoles, classes préparatoires aux grandes écoles, sections de techniciens supérieurs). Le jury estime donc que le niveau visé doit permettre au professeur agrégé d'intervenir sereinement et efficacement sur le créneau « bac-3/bac+3 » ; cet objectif calibre la conception du programme et les critères d'évaluation. Le programme et la nature des épreuves écrite et orales font l'objet de publications sur le site officiel de ministère de l'éducation nationale `http://www.devenirenseignant.gouv.fr/`. En vue de la session 2018, le jury a jugé opportun de faire évoluer le programme ; cette nouvelle version du programme est disponible à l'URL `http://media.devenirenseignant.gouv.fr/file/agregation_externe/59/3/p2018_agreg_ext_math_759593.pdf`. Les candidats sont aussi invités à consulter le site officiel de l'agrégation externe de mathématiques, à l'adresse `http://www.agreg.org`, où se trouvent de nombreuses archives utiles et tous les renseignements pratiques concernant les sessions à venir. Les futurs candidats peuvent aussi trouver sur ce site la `ClefAgreg` qui leur permettra de se familiariser avec l'environnement informatique qu'ils rencontreront pour l'épreuve de modélisation.

Le jury recommande finalement aux candidats de se préoccuper suffisamment tôt des questions liées à la gestion de leur carrière auxquelles ils seront confrontés en cas de succès au concours. Afin de les guider, l'inspection générale collecte les textes réglementaires relatifs aux différentes situations que les lauréats de l'agrégation externe peuvent rencontrer et édite une note indiquant les recommandations correspondantes `http://igmaths.org/spip/spip.php?rubrique17`. A priori, les lauréats de ce concours sont considérés comme devant être immédiatement opérationnels et ne sont donc pas concernés par les procédures de report de stage. Il est à noter que les reçus bénéficient d'une bonification d'ancienneté de deux ans au titre de la période de préparation du doctorat ; lorsque la période de préparation du doctorat a été accomplie sous contrat de travail, les services accomplis dans ce cadre sont pris en compte (article 6 du décret n°. 72-580 du 4 juillet 1972 relatif au statut particulier des professeurs agrégés de l'enseignement du second degré, modifié par le décret n°. 2016-656 du 20 mai 2016). On peut penser que ce nouveau concours, ouvert dans l'optique de valoriser l'insertion professionnelle des titulaires d'un doctorat, pourra aussi permettre de recruter des professeurs agrégés ayant un parcours professionnel riche, souvent international, une expérience de recherche, des compétences en informatique, *etc.*

1.2 Commentaires généraux et statistiques sur la session 2017

1.2.1 Commentaires généraux

Le concours spécial docteur est une nouveauté de la campagne de recrutement 2017, instaurée par le décret n°. 2016-656 du 20 mai 2016. Cinq disciplines étaient concernées par l'ouverture de ce nouveau concours en 2017 : mathématiques, physique-chimie, biochimie, langues et lettres. Avec quinze postes chacune, ce sont les sections de lettres modernes et de mathématiques qui bénéficiaient du plus grand nombre de postes ouverts à cette session 2017. Les modalités des épreuves sont décrites par l'arrêté du 28 juin 2016, accessible sur le site `https://www.legifrance.gouv.fr/`. Le programme de ce concours spécial est identique à celui du concours standard. En revanche, les jurys, les délibérations et les classements du concours spécial et du concours standard sont distincts.

Ce concours spécial est réservé aux titulaires d'un doctorat, le diplôme devant être acquis à la date de publication de la liste des admissibles. Les mères ou pères d'au moins trois enfants ainsi que les sportifs de haut niveau sont dispensés de cette condition de diplôme, mais ils seront bien sûr confrontés aux mêmes épreuves. En particulier candidater à ce concours n'a de sens que pour une personne qui, sans être forcément titulaire d'un doctorat, peut justifier d'un parcours et d'une expérience pouvant être mis en valeur dans la troisième épreuve orale. Il est important de savoir que ce concours est ouvert à tout ressortissant d'un État membre de l'Union européenne [2], d'un État faisant partie de l'accord sur l'Espace économique européen, de la principauté d'Andorre, de la Confédération suisse ou de la Principauté de Monaco. Ainsi, ce concours peut être une opportunité pour des docteurs ressortissants de ces pays, intéressés pour exercer en France, mais dont le parcours académique initial, par exemple effectué à l'étranger, ne donnait pas d'inclination particulière pour passer le concours de l'agrégation externe standard dans la lignée de leur cursus. Enfin, le format de l'épreuve se veut aussi très ouvert aux candidats qui seraient titulaires d'une thèse dans une autre discipline : ils auront l'occasion d'expliquer comment des outils mathématiques sont intervenus au cours de leur expérience de recherche ou professionnelle, comment ils ont été exploités au service d'applications concrètes et comment cette expérience pourra enrichir leur pratique d'enseignant en mathématiques.

Avant de commenter les résultats de ce nouveau concours, il n'est pas inintéressant de s'attarder sur les données des sessions antérieures du concours standard. Cette analyse doit se faire avec précaution dans la mesure où ces données peuvent être incomplètes et qu'elles résultent d'un processus purement déclaratif. Ainsi, depuis 2009, le nombre de candidats à l'agrégation externe de mathématiques qui se déclarent docteurs a plus que doublé : 131 en 2009, 338 en 2016. Cette progression a suivi l'augmentation du nombre d'inscrits à ce concours qui est passé de 2300 à 3300. Le nombre d'admissibles dans cette population est passé de 22 à 60, mais avec une barre d'admissibilité qui a fortement décru ces dernières années. Le nombre d'admis-docteurs est, sur cette période, globalement de l'ordre de la quinzaine depuis 2011. Ainsi, on peut avoir à l'esprit que le ratio reçus/inscrits n'est que de 1/20 pour les docteurs alors qu'il est de l'ordre de 1/3 pour les étudiants.

Ces données indiquent qu'il y a un vivier de candidats docteurs intéressés par une orientation vers les carrières de l'enseignement. Cependant le faible taux de réussite de candidats ayant un niveau de qualification universitaire élevé, dont certains ont enseigné dans le supérieur, vient rappeler que le concours de l'agrégation est exigeant ; il réclame une maîtrise approfondie et un recul important sur tout le programme des niveaux L1-L2-L3, et de bonnes connaissances sur des notions de niveau M1-M2. La réussite à ce concours repose sur une préparation soigneuse, notamment pour acquérir la nécessaire capacité de synthèse entre des champs techniques variés. L'impression à la veille de l'ouverture de ce nouveau concours pouvait se résumer ainsi : si les docteurs ont souvent ce recul et cette capacité de synthèse, ils se révèlent parfois fragiles sur les bases des sujets qui composent le programme du concours. Comme on va le voir, cette première édition du concours spécial a en partie conforté cet *a priori*.

Pour cette session, 300 candidats étaient inscrits au concours spécial : pour 134 d'entre eux il s'agissait de l'unique inscription à un concours d'agrégation, 34 étaient inscrits aussi à au moins une agrégation interne mais pas à l'externe, 80 étaient inscrits à au moins une autre agrégation externe mais pas à un concours interne et 59 s'étaient inscrits aussi aux concours externe et interne. Seulement 125 candidats ont composé à l'épreuve écrite, une proportion des inscrits (41 %) un peu plus faible qu'au concours standard. Elle peut s'expliquer par le fait que certains candidats se sont inscrits aux deux concours et qu'une proportion d'entre eux a finalement dû choisir de composer au concours standard [3].

2. Pour l'édition 2018, les candidatures des ressortissants du Royaume-Uni seront recevables.

3. Les données – déclaratives – du concours standard indiquent que 245 des inscrits se prétendaient titulaires d'un doctorat ; 80 d'entre eux ont composé aux épreuves écrites, 38 ont été déclarés admissibles et 9 sont admis.

Admissibilité L'épreuve écrite, unique, se présente sous un format légèrement différent de celui du concours standard. Un exemple de sujet et son corrigé, publiés sur le site http://www.agreg.org, avaient été rendus disponibles en amont du concours. Le sujet était constitué

— d'une série d'exercices,
— de deux problèmes **au choix**, l'un plutôt orienté sur la partie algèbre-géométrie du programme, l'autre orienté sur la partie analyse-probabilités.

L'exemple rendu public et l'en-tête du sujet invitaient très clairement les candidats à répartir leur temps, dont au moins la moitié devrait être dévolue au problème et au moins un tiers à la partie exercices. Le barème correspondait bien sûr à une telle répartition de l'effort. Un format de ce type sera reconduit en 2018 (probablement sous une forme plus contrainte quant au choix des exercices).

Le jury rappelle que la correction des copies est **dématérialisée** : les correcteurs ne travaillent pas directement sur les copies-papier, mais sur une version numérisée de celles-ci. La présentation doit donc être particulièrement soignée (et en évitant d'écrire dans les marges).

À l'issue de la délibération d'écrit, 30 candidats ont été déclarés admissibles ; le premier admissible avait une note de 17/20 et le dernier une note de 5/20. Bien que la comparaison de deux concours différents sur des sujets différents soit sujette à caution, le jury estime que les candidats retenus auraient obtenu des résultats équivalents au concours standard et, compte tenu des critères d'admissibilité en vigueur actuellement, qu'ils y auraient eu aussi leur place parmi les admissibles.

Admission Alors que le concours comporte une épreuve sur dossier, impliquant ainsi une connaissance du parcours du candidat, le jury a décidé de travailler de manière étanche : les commissions des épreuves de (leçons de) mathématiques et de modélisation n'avaient aucune indication sur le profil des candidats (sujet de thèse, provenance, situation professionnelle...). Ces épreuves obéissaient donc au même fonctionnement et aux mêmes critères d'évaluation que pour le concours standard.

Pour l'épreuve de mise en perspective didactique du dossier recherche, chaque dossier a été confié au préalable à deux membres du jury, avec mission d'en être rapporteurs devant la commission d'évaluation. L'appréciation du document fourni faisait partie des éléments de la grille de notation. Les deux autres membres du jury ont été réputés avoir un regard plus « candide » sur la présentation orale de ce dossier.

Bien que cette demande puisse être légitime au regard des pratiques de la communauté mathématique, les textes régissant le concours interdisent l'exploitation de matériel auxiliaire : les candidats ne pouvaient donc pas appuyer leur présentation sur un support projeté préparé à cette fin. Le jury déplore que cette possibilité ne puisse pas être offerte aux candidats. Pour compenser en partie cette difficulté, le jury a décidé de projeter le document de 12 pages fourni par les candidats en amont du concours. Ce document pouvait notamment contenir des images ou des figures en illustrant le contenu et cela pouvait permettre de rendre l'exposé plus vivant. Le jury attire l'attention des futurs candidats sur le fait que cette configuration donne l'opportunité, si nécessaire, d'insérer des animations dans le fichier PDF.

Chaque candidat recevait aussi en début de préparation une question spécifique l'invitant à développer sa réflexion sur la dimension didactique qui pourrait être donnée à son expérience de recherche et à expliquer comment cette expérience pourrait rejaillir dans ses fonctions d'enseignant. Il était rappelé au candidat que l'épreuve avait pour objectif « d'apprécier l'aptitude du candidat à rendre ses travaux accessibles à un public de non-spécialistes ». Une grande attention avait été apportée à la composition des commissions pour justement éviter la présence d'experts du sujet de thèse du candidat. Le candidat était invité à préciser le niveau auquel il estimait fixer son auditoire (L1-L3 ou M1-M2). L'appréciation de cette aptitude à se faire comprendre par des non-spécialistes occupait une part substantielle de la grille de notation.

L'épreuve comprenait donc deux parties distinctes. Dans un premier temps, durant 30 minutes, le candidat avait toute latitude pour exposer les éléments saillants de son dossier (durant au moins 20 minutes) et pour répondre à la question posée (durant au moins 5 minutes). La suite de l'interrogation était consacrée à un dialogue avec le jury. Ce dialogue explorait l'intégralité du contenu du dossier : contexte des résultats obtenus durant la thèse, positionnement vis-à-vis du programme du concours, perspectives didactiques, *etc.* Le jury a observé que lorsque les candidats passaient cette épreuve avant celle des leçons mathématiques, ils tentaient lors de cette dernière d'élaborer une approche didactique des résultats, malheureusement pas toujours avec pertinence.

Sur l'ensemble des trois épreuves, les candidats ont produit des prestations disparates. De manière très surprenante, pour des candidats ayant une longue expérience académique et alors que la convocation recommandait vivement de consulter très attentivement le rapport du concours standard, une fraction significative d'entre eux a semblé ne pas être au fait des modalités de l'épreuve (minutage de l'interrogation, nature du développement dans l'épreuve de leçon, tendance à proposer une leçon à l'épreuve de modélisation, *etc.*). Cette ignorance témoigne d'un manque de professionnalisme.

Les épreuves orales ont révélé des travers et des traits fréquents qui caractérisent la population des candidats de ce concours :

— Une crainte devant les questions les plus simples et les outils les plus élémentaires, laissant à penser que leurs savoirs de niveau master et au-delà cacheraient des lacunes sur les mathématiques de niveau licence. D'ailleurs, le jury a observé que, lorsque les candidats avaient le choix entre un sujet « de base assez général » et un sujet « avancé plus pointu », ils choisissaient majoritairement ce dernier, par exemple théorème d'inversion locale plutôt que suites numériques, espaces L^p plutôt que séries de nombres réels ou complexes, *etc.* Cette tendance s'exprime aussi par le recours à des notions dépassant de très loin le programme du concours, alors même que les sujets sont communs avec ceux du concours standard. Cette propension outrancière à faire appel à des outils sophistiqués se combine malheureusement avec une faiblesse surprenante sur les notions de base, comme le montre cet exemple étonnant d'un candidat qui évoque les opérateurs pseudo-différentiels, citant les ouvrages de L. Hörmander, mais peine à énoncer la définition de la continuité ou à résoudre une équation différentielle linéaire ! Il ne s'agit malheureusement pas d'une caricature, mais d'un trait typique, à différents degrés, de la population de ce concours.

— En revanche, les candidats ont fait montre de qualités de synthèse et d'un certain recul. Ainsi, ils tirent assez bien leur épingle du jeu lorsqu'il s'agit d'introduire une leçon et de la situer dans un contexte plus général. Toutefois, les candidats ne hiérarchisent pas toujours bien les concepts et énoncés auxquels ils font appel dans les deux oraux de mathématiques.

— Enfin, le jury a déploré une attitude parfois familière ou désinvolte, avec une tendance à manifester leur appétence pour des concepts outrageusement sophistiqués par un certain mépris pour les questions tentant de les ramener sur les fondamentaux du programme. Il en résulte pour une partie des candidats un comportement inadapté à un concours de recrutement de professeur. De tels comportements ne sont pas majoritaires, mais — de manière générale — la faiblesse des développements, trop rarement menés correctement, et la réticence à **écrire** des énoncés complets témoignent de cette difficulté inquiétante à exposer l'argumentation détaillée d'une démonstration ou d'un résultat mathématique. Le jury conseille de s'inspirer de l'adage « ce qui se comprend bien, doit aussi s'énoncer clairement ».

Il est très préoccupant d'observer chez nombre de candidats titulaires d'une thèse en mathématiques la fragilité du socle des connaissances élémentaires. Ces faiblesses peuvent amener à s'interroger sur la formation disciplinaire apportée aux doctorants durant leur thèse afin de conforter leurs connaissances au-delà de leur sujet de recherche. L'ouverture de ce concours docteurs peut donner l'opportunité aux écoles doctorales de valider la participation à des enseignements de préparation au concours au titre de la formation doctorale en vue de l'insertion professionnelle. Cette formation en cours de thèse pourrait constituer un renforcement disciplinaire intéressant pour les doctorants et élargir le public des préparations, notamment les plus petites d'entre elles, qui pourraient trouver ainsi une population motivée, un peu plus mature, capable de jouer un rôle d'émulation dans les promotions. Une analyse plus poussée des performances des candidats montre que les candidats ayant une thèse d'une autre discipline semblent mieux préparés, davantage soucieux de respecter les règles et ne font pas preuve de condescendance vis-à-vis des questions considérées comme « simples » par le jury. L'épreuve de mise en perspective du dossier recherche a valorisé les candidats qui s'étaient préparés avec soin ; ils ont su présenter habilement en quoi leur parcours pouvait être un atout pour leur métier d'enseignant.

À l'issue des délibérations, le jury a retenu les 10 candidats qui avaient franchi la note moyenne de 8,1/20 ; la tête du concours présente une moyenne de 14,4/20. Le caractère nouveau de ce concours spécial peut expliquer que le jury n'ait pu pourvoir tous les postes proposés. D'une part, une partie des candidats n'ayant pas franchi la barre d'admission manquait manifestement de préparation au concours. Leurs résultats sont très probablement en deçà de leur potentiel, qu'on peut déceler par des parcours académiques brillants. D'autre part, les données déclaratives du concours standard laissent penser qu'un certain nombre de titulaires d'un doctorat ont préféré tenter leur chance à ce dernier. Ce concours spécial, avec son format original, peut pourtant donner l'occasion à des candidats docteurs de mettre en valeur leur parcours recherche, y compris dans des disciplines hors des mathématiques, et de mieux tirer profit de leurs spécificités. Mais, bien sûr, le succès passe par un minimum de préparation.

1.2.2 Données statistiques diverses

Effectifs détaillés Aux commentaires déjà faits plus haut, on peut ajouter que 3 candidats se présentaient au titre de sportif de haut niveau et 8 à celui de père ou mère d'au moins 3 enfants. Aucun d'entre eux n'a été déclaré admissible.

Professions et diplômes De manière peut-être inattendue, on relève une grande proportion de candidats certifiés, chez les inscrits, comme chez les admissibles : cette catégorie représente environ le tiers des candidats inscrits et des présents à l'écrit. Avec 3 admis certifiés sur 10 lauréats, cette proportion est conservée au stade ultime du concours. Quatre des candidats reçus s'étaient déclarés sans emploi ; deux étaient inscrits dans des cursus universitaires, et un des lauréats exerce comme contractuel dans un établissement d'enseignement secondaire.

Le jury se réjouit d'évaluer dans ce concours des candidats ayant une thèse d'une autre discipline que les mathématiques (physique, informatique, automatique, sciences de l'ingénieur). Trois des lauréats présentent un tel profil. Ces candidats semblent s'être bien préparés et l'épreuve de mise en perspective du dossier recherche leur a permis de mettre en valeur leur parcours et leur orientation vers les mathématiques. On trouve aussi parmi les reçus des candidats ayant une thèse relevant des branches les plus appliquées des mathématiques (statistiques appliquées, mécanique des fluides), dont le parcours n'était peut-être pas le plus naturel pour s'engager dans le concours de l'agrégation. En revanche, le jury regrette que les candidats spécialisés en informatique n'aient pu franchir la barre d'admission cette année.

Profession	Inscrits	Présents	Composés	Admissibles	Oral	Admis
CERTIFIE	94	52	52	10	8	3
SANS EMPLOI	34	11	11	7	6	4
CONTRACTUEL 2ND DEGRE	20	10	10	1	1	1
CONTRACT ENSEIGNANT SUPERIEUR	18	4	4			
ENSEIGNANT DU SUPERIEUR	18	6	6	2	2	
ENS.STAGIAIRE 2E DEG. COL/LYC	15	6	6	1	1	
ETUD.HORS ESPE (SANS PREPA)	14	4	4	2	2	1
CADRES SECT PRIVE CONV COLLECT	14	3	3	1	1	
AG NON TITULAIRE FONCT PUBLIQ	7	2	2			
SALARIES SECTEUR TERTIAIRE	6	2	2			
VACATAIRE ENSEIGNANT DU SUP.	6	5	5			
PERS ENSEIG TIT FONCT PUBLIQUE	6	2	2	1	1	
PLP	5	3	3			
MAITRE CONTR.ET AGREE REM TIT	5	3	3	1		
AGREGE	4	1	1			
ETUD.HORS ESPE (PREPA MO.UNIV)	4	3	3	2	2	1
ETUDIANT EN ESPE EN 1ERE ANNEE	4	1	1			
MAITRE AUXILIAIRE	4	1	1			
FORMATEURS DANS SECTEUR PRIVE	3	1	1			
PERS FONCTION PUBLIQUE	3	1	1	1	1	
SALARIES SECTEUR INDUSTRIEL	3					
ETUDIANT EN ESPE EN 2EME ANNEE	2					
PERS ENSEIG NON TIT FONCT PUB	1					
PROFESSEUR ECOLES	1					
ETUD.HORS ESPE (PREPA CNED)	1					
MILITAIRE	1					
AGRICULTEURS	1	1	1	1	1	
PROFESSIONS LIBERALES	1					
AGENT ADMI.MEMBRE UE(HORS FRA)	1					
CONTRACTUEL APPRENTISSAGE(CFA)	1					
ENSEIG NON TIT ETAB SCOL.ETR	1	1	1			
VACATAIRE DU 2ND DEGRE	1					
PERSONNEL DE DIRECTION	1	1	1			

Résultat du concours par catégories professionnelles [4]

4. Les catégories professionnelles correspondent aux déclarations des candidats lors de l'inscription : elles ne font l'objet d'aucune vérification et doivent être considérées avec prudence.

Répartition selon le sexe Sur les 300 candidats inscrits, 88 étaient des femmes (29 %). Avec seulement 3 femmes parmi les 30 candidats admissibles, cette proportion a considérablement chuté à l'issue de l'épreuve écrite. Lors de la correction de cette épreuve, qui se fait de manière totalement dématérialisée, le jury ne dispose d'absolument aucune information sur les candidats : il n'a accès à ce moment-là qu'aux copies repérées par un numéro. Il est donc difficile d'imaginer quelle mesure pourrait permettre d'identifier et corriger un éventuel biais, pour autant qu'il y en ait un dans cette étape du concours. À l'issue des épreuves orales, une seule femme est déclarée admise (ce qui est encore cohérent avec la composition de l'effectif admissible !) ; ses performances lui permettent d'être à la tête de cette première édition du concours spécial en mathématiques.

Répartition selon l'âge L'âge des candidats inscrits s'étend de 27 à 62 ans ; une amplitude qui diffère peu de celle du concours standard. La majeure partie des admissibles et des admis occupe le créneau 28-37 ans. Parmi les admissibles, les dates des soutenances de thèse s'étalent de 1987 à 2015. Les reçus quant à eux ont soutenu leur thèse entre 1995 et 2015.

Age	Inscrits	Présents	Composés	Admissibles	Oral	Admis
24	1					
25	1					
26	1					
27	9	1	1			
28	12	3	3	3	2	2
29	13	1	1	1	1	
30	19	8	8	2	2	1
31	22	7	7	3	3	
32	21	10	10	3	3	2
33	12	7	7	2	1	
34	16	7	7			
35	24	10	10	5	4	2
36	10	5	5	1	1	1
37	12	4	4	2	1	
38	10	4	4	2	2	
39	8	2	2			
40	7	4	4			
41	7	2	2			
42	3	2	2			
43	6	3	3			
44	16	8	8	1	1	
45	8	4	4	1	1	1
46	5	1	1			
47	5	4	4			
48	8	3	3			
49	6	4	4			
50	6	5	5	1	1	1
51	4	1	1			
52	5	2	2			
53	4	4	4	1	1	
54	5	2	2			
55	4	1	1			
56	3	2	2	1	1	
57	3	2	2	1	1	
59	1					
60	1					
61	1					
62	1	1	1			

Tableau de répartition des candidats en fonction de l'âge

Répartition selon l'académie

Academies	Inscrits	Présents	Composés	Admissibles	Oral	Admis
CRETEIL-PARIS-VERSAIL.	60	28	28	6	6	1
LYON	19	8	8	3	1	
BORDEAUX	18	4	4			
GRENOBLE	18	6	6			
AIX-MARSEILLE	16	8	8	1		
ROUEN	14	6	6	1	1	
NANCY-METZ	12	7	7			
NANTES	12	4	4	2	2	1
NICE	12	2	2			
POITIERS	11	4	4			
CAEN	10	3	3			
LILLE	10	3	3	3	3	1
MONTPELLIER	9	5	5	1	1	1
REIMS	9	5	5	1	1	1
RENNES	8	5	5	3	3	2
STRASBOURG	8	3	3	1	1	1
TOULOUSE	8	4	4	2	2	1
DIJON	7	3	3			
CLERMONT-FERRAND	6	2	2	1	1	
ORLEANS-TOURS	6	2	2	1	1	
AMIENS	5	3	3	1	1	
LA REUNION	5	1	1	1	1	1
GUADELOUPE	5	4	4	1	1	
BESANCON	4					
NOUVELLE CALEDONIE	3	1	1			
GUYANE	2	1	1			
LIMOGES	1	1	1	1		
MARTINIQUE	1					
POLYNESIE FRANCAISE	1	1	1			

Répartition par académie

Chapitre 2

Épreuve écrite de mathématiques

2.1 Rapport sur l'épreuve écrite de mathématiques

Remarques générales L'unique épreuve écrite du concours spécial d'agrégation se présente sous un format différent de celui du concours classique. Elle est constituée :

— d'une série d'exercices portant sur des parties variées du programme, de niveau relativement élémentaire ;

— de deux problèmes au choix, abordant des notions plus avancées que les exercices, à thématiques nettement différentes (dominante algèbre-géométrie pour le premier, analyse-probabilités pour le second).

Le choix de ce format a été dicté par les considérations suivantes :

— d'une part, la volonté de vérifier la solidité des connaissances de base (niveau L) ;

— et d'autre part, celle de permettre aux candidats, qui ont pratiqué des mathématiques nettement au-dessus du niveau L3 dans leur recherche, de tirer parti de leurs points forts.

Un « sujet zéro », accompagné de son corrigé, avait été diffusé l'été précédant le concours sur le site http://www.agreg.org. Cet exemple et l'en-tête du sujet de cette année invitaient les candidats à répartir leur temps, en consacrant au moins la moitié de l'épreuve au problème et au moins le tiers aux exercices. Le barème était conçu en conséquence. Le corrigé du sujet zéro devait par ailleurs permettre aux candidats d'avoir une idée du niveau de rédaction attendu.

Contenu du sujet Le sujet comprenait donc une série de neuf exercices, qui pouvaient être abordés librement et deux problèmes.

Les exercices

Les neuf exercices se répartissaient comme suit : analyse (exercices 1 à 5), algèbre et géométrie (exercices 6 à 8), probabilités (exercice 9). Tous relevaient au plus du niveau L3. Les thèmes abordés étaient très classiques :

— liens entre continuité, dérivabilité et caractère lipschitzien d'une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ (exercice 1) ;

— distance d'un point d'un espace normé à un sous-espace de dimension finie (exercice 2) ;

— étude de la continuité de la forme linéaire d'évaluation en 0 pour la norme uniforme puis pour la norme de la convergence en moyenne sur $C([0,1],\mathbf{R})$, (exercice 3) ;

— fonctions entières à croissance polynomiale (exercice 4) ;

— conditions au bord pour une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 (exercice 5) ;

— non-existence d'un sous-groupe d'ordre 6 dans $\mathcal{A}_4$ [1] (exercice 6) ;

1. Ce qui est un contre-exemple « minimal » à une réciproque du théorème de Lagrange.

— description des sous-espaces stables d'un endomorphisme diagonalisable (exercice 7) ;
— demi-tours d'un espace euclidien de dimension 3 et démonstration du fait que $\mathrm{SO}_3(\mathbf{R})$ ne contient pas de sous-groupe non trivial agissant transitivement sur S^2 (exercice 8) ;
— inégalité de grandes déviations pour une somme finie de variables aléatoires de RADEMACHER mutuellement indépendantes [2] (exercice 9).

Le problème 1

Le premier problème portait sur l'analyse harmonique sur les groupes abéliens finis. Dans un premier temps, on retrouvait les résultats de base du sujet (base orthonormée des caractères, formule d'inversion de FOURIER) en étudiant les opérateurs de convolution sur l'algèbre de groupe $\mathbf{C}[G]$. Le but du problème était d'étudier la problématique du principe d'incertitude dans ce cadre algébrique. Notant $S(f)$ le support d'une fonction complexe, on démontrait les deux résultats suivants :
— Principe d'incertitude de DONOHO-STARK (1989) : si f est dans $\mathbf{C}[G]\backslash\{0\}$, alors $|S(f)|\,|S(\widehat{f})| \geqslant |G|$.
— Principe d'incertitude de TAO (2005, [4]) : si G est cyclique de cardinal premier p et si f est dans $\mathbf{C}[G]\backslash\{0\}$, alors $|S(f)| + |S(\widehat{f})| \geqslant p+1$.

Le premier énoncé est une conséquence très simple de la formule d'inversion de FOURIER. Il n'en va pas de même du deuxième, qui est l'objectif essentiel du problème et que l'on peut reformuler de plusieurs façons :
— comme un résultat du type « règle de DESCARTES » : un polynôme de $\mathbf{C}[X]$ admettant exactement r coefficients non nuls avec $1 \leqslant r \leqslant p-1$ s'annule au plus $r-1$ fois sur le groupe des racines p-ièmes de 1 ;
— comme un énoncé d'algèbre linéaire : toute sous-matrice carrée extraite de la matrice de VANDERMONDE
$$\left(\exp\left(\frac{2i\pi jk}{p}\right)\right)_{0\leqslant j,k\leqslant p-1}$$
est inversible.

Il est amusant de noter que l'énoncé d'algèbre linéaire ci-dessus remonte à TCHEBOTAREV (1926) et a été redécouvert à plusieurs reprises, notamment par DIEUDONNÉ en 1970 (voir [2]). L'élégante approche proposée, qui conduit à une jolie promenade dans le programme d'algèbre, suit un article de P.E. FRENKEL (voir [3]). L'idée centrale est d'utiliser un argument très simple d'inertie pour réduire la démonstration du résultat type règle de DESCARTES au cas d'un polynôme à coefficients dans le corps cyclotomique $\mathbf{Q}\left(\exp\left(\frac{2i\pi}{p}\right)\right)$, et même dans l'anneau $\mathbf{Z}\left[\exp\left(\frac{2i\pi}{p}\right)\right]$. La démonstration de ce cas particulier repose sur la réduction modulo $1-\exp\left(\frac{2i\pi}{p}\right)$ dans l'anneau précédent ; on y utilise un fait classique de théorie des nombres, selon lequel le quotient $\mathbf{Z}\left[\exp\left(\frac{2i\pi}{p}\right)\right]/\left(1-\exp\left(\frac{2i\pi}{p}\right)\right)$ est le corps fini de cardinal p.

Le problème s'achevait par une démonstration de l'inégalité classique de CAUCHY-DAVENPORT via le principe d'incertitude de TAO (voir [5]).

Le problème 2

Ce second problème avait pour but d'établir un résultat récent d'Yves MEYER. Pour formuler cet énoncé, il est nécessaire d'introduire un peu de terminologie. On considére une mesure atomique sur $\mathbf{R}$, c'est-à-dire une distribution de la forme

$$S\ : f \in C_c^{\infty}(\mathbf{R}) \longmapsto \sum_{\lambda\in\Lambda} c_\lambda f(\lambda)$$

2. Premier pas modeste vers la « loi du logarithme itéré ».

où Λ est une partie localement finie de $\mathbf{R}$ et $(c_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de nombres complexes. Si S est tempérée, on peut définir sa transformée de Fourier $\widehat{S}$. On dit que S est une *mesure cristalline* si $\widehat{S}$ est également une mesure atomique.

Le premier exemple de mesure cristalline est le peigne de DIRAC $\sum_{k\in\mathbf{Z}}\delta_k$, qui est sa propre transformée de FOURIER (formule sommatoire de POISSON). Les propriétés formelles de la transformation de FOURIER permettent d'en déduire une famille de mesures cristallines dont les supports sont des réunions finies de progressions arithmétiques [3].

Suivant [1], on appelle *mesure cristalline exotique* toute mesure cristalline dont le support n'est pas contenu dans une réunion finie de progressions arithmétiques. En réinterprétant un article ancien de GUINAND, Y. MEYER a construit dans [4] une mesure cristalline exotique, dont le support est l'ensemble des nombre réels de la forme $\pm\frac{\sqrt{n}}{2}$ où n parcourt les entiers naturels non divisibles par 16 qui sont sommes de trois nombres carrés [4]. Cette mesure S vérifie [5] $\widehat{S} = -i\,S$. Le point de départ du travail est d'élever au cube l'équation fonctionnelle de la fonction θ de JACOBI, elle-même conséquence de la formule de POISSON.

L'énoncé du problème permettait de parcourir de nombreux points du programme d'analyse du concours. Le début était consacré à la formule sommatoire de POISSON et à l'équation fonctionnelle de la fonction θ. On établissait ensuite que les fonctions d'HERMITE forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbf{R})$. Cette base est constituée de fonctions propres de l'opérateur

$$f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}) \longmapsto (x \mapsto -f''(x) + 4\pi^2x^2f(x)),$$

ce qui permet d'obtenir que la suite des coefficients de FOURIER-HERMITE d'un élément de $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ est à décroissance rapide. Le sujet se poursuivait par quelques faits élémentaires relatifs aux mesures et aux distributions tempérées et s'achevait par la construction de la mesure cristalline de GUINAND-MEYER, qui sollicitait une grande partie des questions antérieures.

Dans un travail très récent en collaboration avec J. I. DIAS (voir [1]), Yves MEYER a relié la mesure cristalline exotique du problème à l'équation des ondes sur le tore tridimensionnel et donné une nouvelle démonstration de l'identité $\widehat{S} = -iS$ fondée sur le principe de HUYGENS.

Références bibliographiques

[1] J. I. DIAZ, Y. MEYER, *Poisson summation formulae and the wave equation with a finitely supported measure as initial velocity*, Afr. Diaspora. J. Math., vol. 20, no. 1, 2017, pp. 1-13

[2] J. DIEUDONNÉ, *Une propriété des racines de l'unité*, Rev. Un. Mat. Argentina, 25, pp. 1-3, 1970

[3] P. E. FRENKEL, *Simple proof of Chebotarëv's theorem on roots of units*, arXiv : math/0312398, 2003

[4] Y. MEYER, *Measures with locally finite support and spectrum*, P.N.A.S., March 22, 2016, vol. 113, no.12, pp. 3152-3158

[5] T. TAO, *An uncertainty principle for cyclic groups of finite order*, Math. Res. Letters, 12, no. 1, pp. 121-127, 2005

3. Ces constructions s'étendent bien entendu en dimension n ; on remplace alors les réunions finies de progressions arithmétiques par des réunions finies de classes modulo des réseaux de $\mathbf{R}^n$.

4. Cet ensemble peut être décrit explicitement grâce à un théorème de GAUSS.

5. Rappelons que la théorie des fonctions d'HERMITE montre que les valeurs propres de la transformation de FOURIER sur $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ (ou sur $L^2(\mathbf{R})$) sont les racines quatrièmes de 1.

Commentaires généraux sur les copies

À l'exception de l'une d'entre elles, chacune des sous-questions composant les exercices a été résolue correctement dans au moins une copie. En revanche, très peu de copies ont traité un nombre significatif d'exercices.

Comme le montre l'analyse des questions ci-dessous, les candidats ont, pour la grande majorité d'entre eux, d'importantes lacunes au niveau L. Leur rédaction est souvent très peu efficace. Les questions techniques d'analyse (permutation somme-intégrale, dérivation sous l'intégrale) ne sont quasiment jamais traitées de façon satisfaisante. La plupart des candidats maîtrisent très mal les notions d'algèbre et de géométrie du niveau L, ce qu'attestent les réponses particulièrement faibles aux exercices 6, 7, 8.

Le fait le plus surprenant pour les correcteurs est la très faible performance réalisée sur les problèmes. Les candidats à ce concours sont, par nature, plus spécialisés que de jeunes étudiants ; il est tout à fait compréhensible qu'ils fassent montre d'une moindre virtuosité sur l'ensemble des thématiques de l'agrégation. On aurait en revanche pu attendre de tels candidats un certain recul sur la « moitié » du programme la plus proche de leur spécialité de recherche, d'autant que les problèmes étaient construits de manière à proposer en premier lieu des résultats très classiques au niveau M1. Ce n'est pas le cas, le phénomène étant particulièrement marqué pour le problème 2. Ce phénomène s'explique sans doute en partie par un temps excessif passé sur les exercices, imputable à une liste un peu longue.

Les correcteurs de l'épreuve ont tous une bonne expérience des copies du concours standard. Même s'il n'est pas facile de comparer les résultats de deux épreuves différentes, ils pensent pouvoir formuler les conclusions suivantes :

- les meilleures copies sont de très bon niveau, mais cependant en deçà de celles de la tête du concours standard ;
- la proportion de « bonnes » copies est sensiblement plus faible que pour le concours standard ;
- l'étalonnement des copies a permis de mettre la barre d'admissibilité à un niveau très comparable à celui du concours standard.

Analyse détaillée des questions

Exercices

Exercice 1. La question a) est largement abordée ; cependant, les solutions sont le plus souvent très lourdes, avec un « retour aux ε » qui est rarement correctement mené. Les questions b) et c), du niveau L1, ne sont vraiment bien traitées que par moins de la moitié des candidats.

Exercice 2. La convexité rencontre un succès très moyen. Le caractère non vide de $\Pi_V(x)$, qui est une application classique et simple de la locale compacité d'un espace normé de dimension finie, n'a été traité correctement que dans deux copies. À noter que plusieurs candidats se placent dans le cas où la norme est euclidienne, ce qui simplifie les choses mais ne répond pas à la question.

Exercice 3. Les questions de continuité sont résolues de façon satisfaisante par une petite moitié des candidats. En revanche, la question de l'adhérence pour la norme de convergence en moyenne, classique et visuellement évidente [6], s'avère très discriminante.

Exercice 4. La première question est assez souvent correctement traitée du point de vue formel. En revanche, les justifications sont presque toujours absentes ; à noter quelques justifications correctes via le théorème de CAUCHY. Pour la seconde question, beaucoup de fautes, notamment des inégalités sur les nombres complexes.

Exercice 5. Les correcteurs ont été stupéfaits par la très faible proportion de candidats capables de résoudre $y'' + \omega^2 y = 0$; l'oscillateur harmonique fait pourtant partie des connaissances scientifiques de base ! Le second point a reçu un succès moyen, la conclusion n'étant que rarissimement vue.

Exercice 6. La première partie de la question a) est traitée correctement par environ un quart des candidats ; ceux qui en viennent à bout résolvent en général la deuxième partie de la question, le plus souvent de manière assez lourde, sans utiliser le morphisme de G dans G/N. La question b) est un peu mieux réussie, mais peu de candidats comprennent suffisamment l'exercice pour « recoller les morceaux » et conclure.

Exercice 7. La question a) demande d'énoncer un théorème central d'algèbre linéaire de niveau L2 ; elle n'est abordée que par environ une moitié des candidats, dont beaucoup ne formulent pas précisément la réponse. La question b), qui est une application immédiate et classique de a), est encore moins traitée ; la question c) n'est vraiment comprise que par une poignée de candidats.

Exercice 8. Cet exercice de géométrie euclidienne tridimensionnelle est le plus mal réussi de la série, malgré un découpage en questions simples. Identifier le conjugué d'un demi-tour par une rotation pose problème à la grande majorité des candidats et la dernière question n'est jamais complètement résolue.

Exercice 9. Beaucoup de réponses maladroites à la question a), reposant sur le calcul (certes simple) de la loi de S_n ; également des justifications très lacunaires, dans lesquelles le rôle de l'indépendance n'apparaît pas. La question b) est traitée correctement par une part significative des candidats. La technique classique de c) (majoration de grandes déviations via l'inégalité de MARKOV pour la transformée de LAPLACE) a un succès moyen. Très peu de candidats sont capables d'utiliser le lemme de BOREL-CANTELLI dans la question d).

6. Il est recommandé aux candidats de ne pas hésiter à faire des dessins.

Le problème 1

La question 1.a) a été généralement réussie. En revanche, la question 1.b), pourtant immédiate, a rarement été abordée.

Beaucoup de candidats ont abordé la question 2 ; peu l'ont traitée complètement (oubli de certains points), mais le nombre de ceux qui l'ont comprise est significatif.

La question 3 développe un argument central de la théorie des caractères (orthogonalité des caractères dans le cas abélien, via un changement de variable dans la sommation) ; les résultats ont été décevants.

En dépit de son caractère important et classique (codiagonalisation d'une famille commutative d'endomorphismes diagonalisables), la question 4 n'a quasiment jamais été traitée. Idem pour la question 5, qui demandait de combiner les questions 1.b) et 4, et de la question 6, qui nécessitait de prendre un peu de recul. La question 7, qui demandait simplement d'écrire les coordonnées d'un vecteur d'un espace hermitien dans une base orthonormée, a été seulement légèrement mieux réussie.

Les questions 8, 9, 10 n'ont été significativement traitées que par très peu de candidats. Dans la suite, certains ont su grappiller des points sur des questions simples (11.a) et b), 12.b) et 15), les meilleures copies en traitant la quasi-intégralité. Mais les questions plus subtiles n'ont pratiquement jamais été abordées.

En conclusion, les candidats semblent pour la plupart manquer de solidité, non seulement sur l'analyse de Fourier sur les groupes abéliens finis, mais également sur des points plus élémentaires (réduction des endomorphismes, groupes cycliques, rudiments sur les extensions de corps).

Le problème 2

La question 1 a rarement été bien traitée : la plupart des candidats sont incapables de justifier qu'une fonction continue et périodique à série de Fourier absolument convergente est somme de sa série de Fourier, en dépit d'une indication très explicite ; beaucoup se réfèrent de manière purement incantatoire au théorème de Dirichlet, hors de propos ici.

La question 2 établissait la formule de Poisson ; les calculs formels sont souvent faits, mais les justifications sont généralement absentes ou fausses.

La question 3 (calcul de la transformée d'une gaussienne via une équation différentielle) a reçu un succès très mitigé : peu de candidats justifient la dérivation sous l'intégrale, certains confondent les deux variables ; la résolution de l'équation différentielle (linéaire scalaire homogène d'ordre 1) pose souvent problème.

La question 4 (équation fonctionnelle de la fonction θ de Jacobi) a été assez souvent abordée par les candidats ayant compris les questions précédentes.

La démonstration de l'orthogonalité des fonctions d'Hermite (question 4) a connu un certain succès. Mais beaucoup de candidats ne justifient pas que les « crochets » de leurs intégrations par parties sont nuls.

La question 5 faisait établir le caractère total de la famille des fonctions d'Hermite par une méthode combinant le critère de densité par orthogonalité dans un espace de Hilbert, un argument d'holomorphie et l'injectivité de la transformation de Fourier sur $L^1(\mathbf{R})$ [7]. Peu de candidats en sont venus à bout.

7. Avec une normalisation différente, cet argument classique était présent dans le problème d'analyse de la session 2010 du concours standard (partie V).

Les calculs de la question 8 ont été correctement traités par quelques candidats ; les correcteurs ont cependant relevé plusieurs tentatives de bluff.

La suite du problème n'a donné lieu qu'à quelques grappillages. En particulier, les questions relatives aux distributions tempérées n'ont jamais été sérieusement abordées. L'énoncé contenait une erreur : dans la question 16, le théorème de structure des distributions tempérées était formulé de manière incorrecte, toute distribution tempérée étant seulement une combinaison linéaire de distributions de la forme indiquée. Cette coquille n'a pas pénalisé les candidats.

La conclusion est la même qu'en algèbre : les candidats maîtrisent mal les bases de l'analyse de niveau M (intégrale de LEBESGUE, fonctions holomorphes, analyse de FOURIER), voire L (questions 1 et 4). Les correcteurs ont été particulièrement frappés par l'absence ou le caractère fantaisiste des justifications dans les problèmes de permutation de symboles. À noter enfin que, si le problème 2 a été choisi par la majorité des candidats, les résultats sont dans l'ensemble inférieurs à ceux du problème 1.

2.2 Corrigé de l'épreuve écrite de mathématiques

Partie Exercices

1. a) La dérivabilité de f en x_0 assure que

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o\,(x - x_0)\,.$$

Il en résulte aussitôt que

$$f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f(x_0).$$

Contre-exemple à la réciproque : prendre

$$x \longmapsto |x|$$

qui est continue sur $\mathbf{R}$ mais non dérivable en 0.

b) Supposons f lipschitzienne de rapport K. Soient x_0 et x deux points distincts de I. Alors

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| \leqslant K.$$

En faisant tendre x vers x_0, il vient

$$|f'(x_0)| \leqslant K.$$

La fonction f' est bornée sur I.

Réciproquement, si f' est bornée par K sur I, l'inégalité des accroissements finis assure que f est K-lipschitzienne.

c) Si I est un segment, il est compact. Comme f est de classe C^1, la fonction f' est continue sur le compact I donc bornée. On termine avec b).

2. La convexité est simple. Soient en effet v et w dans $\Pi_V(x)$, t dans $[0, 1]$. Alors $(1 - t)v + tw$ est dans V et

$$\|x - ((1 - t)v + tw)\| = \|(1 - t)(x - v) + t(x - w)\| \leqslant (1 - t)\|x - v\| + t\|x - w\|.$$

Par hypothèse, le majorant est égal à $d(x, V)$ ce qui entraîne

$$(1-t)v + tw \in \Pi_V(x).$$

L'existence se traite par compacité. Soit $(v_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'éléments de V telle que

$$\|x - v_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} d(x, V).$$

La suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée, donc admet une valeur d'adhérence v dans l'espace normé de dimension finie $(V, \| \, \|)$. Par continuité de la norme,

$$\|x - v\| = d(x, V).$$

Ainsi, v appartient à $\Pi_V(x)$.

3. a) On a

$$\forall f \in E, \qquad |\delta(f)| \leqslant \|f\|_\infty.$$

La forme linéaire δ est donc continue pour $\| \, \|_\infty$.

En revanche, elle n'est pas continue pour $\| \, \|_1$: si, pour n dans $\mathbf{N}$, on définit u_n par

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n(x) = \max(1 - nx, 0),$$

alors

$$\delta(u_n) = 1 \quad , \quad \|u_n\|_1 = \frac{1}{2n},$$

de sorte que

$$\frac{\delta(u_n)}{\|u_n\|_1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Le critère de continuité pour les applications linéaires permet de conclure.

b) Comme δ est continue pour $\| \, \|_\infty$, $F = \delta^{-1}(\{0\})$ est fermé dans E pour $\| \, \|_\infty$; l'adhérence de F est F.

En revanche, F est dense dans E pour $\| \, \|_1$, donc d'adhérence égale à E. Pour le voir, on fixe f dans E et on note, pour n dans $\mathbf{N}^*$, f_n la fonction dont la restriction à $[0, 1/n]$ est affine, avec

$$f_n(0) = 0 \qquad f_n\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right),$$

et dont la restriction à $[1/n, 1]$ est égale à f (un dessin est vivement recommandé). Il est clair que f_n est dans F. D'autre part

$$\|f_n - f\| = \int_0^{1/n} |f_n - f| \leqslant \frac{2\|f\|_\infty}{n},$$

ce qui montre que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers f dans $(E, \| \, \|_1)$.

4. a) Pour r dans $\mathbf{R}^{+*}$,

$$f(re^{it})\, e^{-int} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k e^{i(k-n)t}.$$

Or

$$\forall j \in \mathbf{Z}, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} e^{ijt}\, \mathrm{d}t = 2\pi\, \delta_{j,0}.$$

Pour démontrer la formule proposée, il reste à justifier l'intégration terme à terme. Mais une série entière converge absolument en tout point intérieur au disque de convergence, donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|\, r^n < +\infty,$$

ce qui prouve la convergence normale, donc uniforme, de la série de fonctions considérée sur le segment $[-\pi, \pi]$ et valide l'intégration terme à terme.

b) Il suffit d'appliquer l'inégalité triangulaire intégrale

$$|a_n| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(re^{it})\, e^{-int}\, \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{it})|\, \mathrm{d}t \leqslant 2\pi M(r).$$

c) Par b), on a, si $n > d$:

$$\forall r \in \mathbf{R}^{+*}, \qquad |a_n| \leqslant \frac{Ar^d + B}{r^n}.$$

Le majorant tend vers 0 lorsque r tend vers $+\infty$. On en déduit que, pour tout $n > d$, a_n est nul, ce qui montre bien que f est un polynôme de degré au plus d.

5. a) Classiquement (oscillateur harmonique), E_q est l'ensemble des fonctions de la forme

$$y_{A,B} \ : t \longmapsto A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t), \quad (A, B) \in \mathbf{R}^2.$$

On a

$$(y_{A,B}(0), y_{A,B}(1)) = (0,0) \Longleftrightarrow (A, B\sin(\omega)) = (0,0).$$

Il en résulte que la fonction q possède la propriété $\mathcal{P}$ si et seulement si $\sin(\omega) \neq 0$, i.e. si et seulement si

$$\omega \in \mathbf{R}^{+*} \backslash \pi\mathbf{N}^*.$$

b) La condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur donne $f'(t_0) = 0$. La formule de Taylor-Young donne la condition nécessaire d'extremum local du second ordre :

$$f''(t_0) \leqslant 0.$$

c) Soit f dans E_q telle que $f(0) = f(1) = 0$. Supposons f non identiquement nulle. Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer que f prend des valeurs strictement positives, donc que le maximum de f (qui existe car f est continue et $[0,1]$ compact) est atteint en un point t_0 de $]0,1[$. On a alors

$$f''(t_0) = -q(t_0)f(t_0) > 0,$$

ce qui contredit b). L'application

$$y \in E_q \longmapsto (y(0), y(1)),$$

qui est manifestement linéaire, est donc injective. C'est un isomorphisme puisque E_q est de dimension 2.

6. a) Soit a dans $G \backslash N$. Les classes N et aN sont disjointes et toutes deux de cardinal $|N|$; elles forment donc une partition de G. Pour n dans N et g dans N,

$$gng^{-1} \in N$$

car N est un sous-groupe de G. Si maintenant g n'est pas dans N, il est dans aN : $g = ah, h \in N$. Ainsi

$$gng^{-1} = ahnh^{-1}a^{-1}.$$

Si cet élément n'était pas dans G, il serait dans aN et $hnh^{-1}a^{-1}$ serait dans N, d'où, puisque hnh^{-1} est dans N, $a^{-1} \in N$ et $a \in N$, contradiction. Au total

$$\forall (g,n) \in G \times N, \qquad gng^{-1} \in N$$

et N est distingué dans G.

Pour la seconde partie de la question, on remarque que la surjection canonique

$$g \longmapsto \overline{g}$$

de G dans G/N est un morphisme et que le groupe G/N est d'ordre 2. Par suite, si g est dans G :

$$\overline{e} = (\overline{g})^2 = \overline{g^2}$$

et g^2 est dans G.

b) Chaque 3-cycle est un carré : pour i, j, k distincts dans $\{1, \ldots, n\}$, on a

$$(i\ j\ k)^2 = (i\ k\ j).$$

Il s'ensuit que le sous-groupe de $\mathcal{A}_n$ engendré par les carrés n'est autre que $\mathcal{A}_n$.

c) Soit K un éventuel sous-groupe de cardinal 6 de $\mathcal{A}_4$. Comme $\mathcal{A}_4$ est de cardinal $\frac{4!}{2} = 12$, on déduit de la question a) que K est distingué dans $\mathcal{A}_4$ et contient tous les carrés de $\mathcal{A}_4$, donc, par la question b), tous les 3-cycles. Comme les 3-cycles engendrent $\mathcal{A}_4$, on a la contradiction désirée.

7. a) L'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal π_u est simplement scindé sur $\mathbf{K}$.

   b) Il est immédiat que $\pi_{u|F}$ divise π_u. Il en résulte que, si u est diagonalisable, $\pi_{u|F}$ est simplement scindé sur $\mathbf{K}$, donc que $u_{|F}$ est diagonalisable.

   c) Si le spectre de u est de cardinal n, les espaces propres de u sont n droites $D_1, \ldots, D_n$. Soit F un sous-espace de E stable par u. Alors $u_{|F}$ est diagonalisable, ce qui revient à dire que F est somme directe de ces intersections avec les espaces propres de u, ou encore que F est une somme

$$F = \bigoplus_{i \in I} D_i.$$

   Il s'ensuit que u admet exactement 2^n sous-espaces stables.

   Si le spectre de u est de cardinal strictement inférieur à n, alors l'un des espaces propres de u est de dimension au moins 2. Puisque $\mathbf{K}$ est infini, ce sous-espace contient une infinité de droites, qui toutes sont stables par u.

8. a) Il est immédiat que $g \circ \sigma_D \circ g^{-1}$ induit l'identité sur $g(D)$ et l'homothétie de rapport -1 sur $g(P)$ où $P = D^{\perp}$ (de sorte que, puisque g est une isométrie, $g(P) = g(D)^{\perp}$). C'est donc un demi-tour d'axe D.

   b) Un demi-tour induit l'homothétie de rapport -1 sur l'orthogonal de son axe, d'où une implication. Dans l'autre sens, soit g dans G tel qu'il existe x tel que $g(x) = -x$. Deux vecteurs propres d'une isométrie associés à des valeurs propres 1 et -1 sont orthogonaux, donc x est dans l'orthogonal de l'axe de g, sur lequel g induit une rotation : cette rotation est nécessairement d'angle π.

   c) Soit x dans S. Puisque $-x$ est dans S, on dispose de g dans G envoyant x sur $-x$: g est un demi-tour par b).

d) Soit D une droite telle que G contienne σ_D, x un vecteur directeur unitaire de D. Soit D' une droite, x' un vecteur unitaire de D'. On dispose de g dans G envoyant x sur x'. La rotation $g \circ \sigma_D \circ g^{-1} = \sigma_{D'}$ est dans G, qui contient donc tous les demi-tours et est par conséquent égal à $\mathrm{SO}(E)$.

9. a) Puisque les e^{tX_i} sont indépendantes et d'espérances finies, le théorème du produit des espérances fournit :

$$E\left(e^{tS_n}\right) = E\left(\prod_{i=1}^{n} e^{tX_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} E(e^{tX_i}) = \mathrm{ch}(t)^n.$$

b) On a

$$\forall u \in \mathbf{R}, \quad \mathrm{ch}(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^{2k}}{(2k)!}, \qquad \exp\left(\frac{u^2}{2}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^{2k}}{2^k k!}.$$

Les u^{2k} sont dans $\mathbf{R}^+$ et, pour k dans $\mathbf{N}$:

$$(2k)! = k! \times (k+1) \times \cdots \times (2k) \geqslant k!\, 2^k.$$

L'inégalité demandée en découle.

c) Comme

$$(X_1, \ldots, X_n) \sim (-X_1, \ldots, -X_n)$$

(car les X_i sont mutuellement indépendantes et symétriques),

$$S_n \sim -S_n.$$

Il suffit donc d'établir

$$P(S_n \geqslant \lambda) \leqslant \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2n}\right).$$

On note à cet effet que, pour $t > 0$:

$$(S_n \geqslant \lambda) = (e^{tS_n} \geqslant e^{t\lambda})$$

et que, puisque $e^{tS_n} \geqslant 0$, on peut utiliser l'inégalité de Markov pour écrire

$$P(S_n \geqslant \lambda) \leqslant e^{-t\lambda} E(e^{tS_n}),$$

d'où, avec a) et b),

$$P\left(S_n \geqslant \lambda\right) \leqslant \exp\left(\frac{nt^2}{2} - \lambda t\right).$$

Il reste à choisir

$$t = \frac{\lambda}{n}$$

pour obtenir l'inégalité désirée.

d) On a

$$A = \bigcup_{n \geqslant 1} \bigcap_{k \geqslant n} A_k.$$

D'après c)

$$P(|S_n| > \sqrt{2cn\ln(n)}) \leqslant \frac{2}{n^c}.$$

Comme $c > 1$, la série de Riemann majorante converge. Il résulte alors du premier lemme de Borel-Cantelli que

$$P(\limsup_{n\to\infty} \overline{A_n}) = 0,$$

ce qui est équivalent au résultat demandé.

Problème 1 – Principe d'incertitude

I. Principe d'incertitude pour les groupes abéliens finis

I.A. Généralités sur les caractères

1. a) La dimension de $\mathbf{C}[G]$ est le cardinal n de G.

   b) Pour g dans G, $g^n = e$, d'où, puisque χ est un morphisme,

$$\chi(g)^n = \chi(g^n) = \chi(e) = 1 \quad \text{et} \quad \chi(g) \in \mathbb{U}_n.$$

2. a) Soient x et y dans $\mathbf{Z}$ tels que $x \equiv y\ [n]$. Alors

$$\frac{2k\pi x}{n} \equiv \frac{2k\pi y}{n}\ [2\pi],$$

donc

$$\exp\left(\frac{2ik\pi x}{n}\right) = \exp\left(\frac{2ik\pi y}{n}\right).$$

L'application χ_k est bien définie. Par ailleurs, si $k \equiv \ell\ [n]$, alors, pour tout x dans $\mathbf{Z}$

$$\frac{2k\pi x}{n} \equiv \frac{2\ell\pi y}{n}\ [2\pi],$$

donc

$$\exp\left(\frac{2ik\pi x}{n}\right) = \exp\left(\frac{2i\ell\pi y}{n}\right),$$

ce qui montre que χ_k ne dépend que de $\dot{k}$.

b) On vérifie facilement que, pour k dans $\mathbf{Z}$, χ_k est un caractère. En effet, si x et y sont dans G,

$$\chi_k(x+y) = \exp\left(\frac{2i\pi k(x+y)}{n}\right) = \exp\left(\frac{2i\pi kx}{n}\right)\ \exp\left(\frac{2i\pi ky}{n}\right) = \chi(x)\ \chi(y).$$

D'autre part, pour k et ℓ dans $\mathbf{Z}$, on a immédiatement

$$\chi_k\chi_\ell = \chi_{k+\ell}.$$

L'application

$$\dot{k} \longmapsto \chi_k$$

est donc un morphisme de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ dans $\widehat{\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}}$. Si $\dot{k}$ est dans le noyau de ce morphisme, alors, en testant sur $x = 1$:

$$\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) = 1 \quad \text{i.e.} \quad n|k \quad \text{i.e.} \quad \dot{k} = \dot{0}.$$

Le morphisme considéré est donc injectif.

Soit enfin χ un élément de $\widehat{Z/n\mathbf{Z}}$. On sait que $\chi(\dot{1})$ est de la forme

$$\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)$$

avec k dans $\mathbf{Z}$. Les morphismes χ et χ_k, qui coïncident sur le générateur $\dot{1}$ de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, sont ainsi égaux. Il en résulte que le morphisme considéré est surjectif.

I.B. Base orthonormée des caractères

3. a) La translation

$$g \longmapsto g + g_0$$

est une bijection de G sur G. On a donc

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = \sum_{g \in G} \chi(g + g_0) = \sum_{g \in G} \chi(g)\, \chi(g_0),$$

d'où le résultat puisque $\chi(g_0) \neq 1$.

b) Soient χ et χ' deux éléments distincts de $\widehat{G}$. Alors $\frac{\chi'}{\chi}$ est un élément de $\widehat{G}$ distinct de 1_G. On peut lui appliquer la formule de a). Comme χ est à valeurs dans $\mathbb{U}$, on a

$$\frac{\chi'}{\chi} = \overline{\chi}\, \chi',$$

ce qui entraîne l'orthogonalité demandée.

4. On établit par récurrence sur d la propriété $\mathcal{P}_d$: pour tout $\mathbf{K}$-espace de dimension d et toute famille commutative $(u_i)_{i \in I}$ d'endomorphismes diagonalisables de E, il existe une base formée de vecteurs propres communs aux $u_i, i \in I$.

La propriété $\mathcal{P}_1$ est évidente. Soit $d \geqslant 2$. Supposons $\mathcal{P}_j$ vraie pour tout j de $\{1, \dots, d-1\}$ et considérons E et $(u_i)_{i \in I}$ comme dans l'énoncé de $\mathcal{P}_d$. Si tous les u_i sont des homothéties de E, toute base de E est constituée d'éléments propres communs aux $u_i, i \in I$. Dans le cas contraire, on dispose de i_0 dans I tel que u_{i_0} ne soit pas une homothétie. L'endomorphisme u_{i_0} étant diagonalisable, son spectre est de cardinal $r \geqslant 2$ et ses espaces propres $E_1, \dots, E_r$ sont tous de dimension au plus $d-1$. Comme u_{i_0} commute à tous les u_i, chacun des $E_j, 1 \leqslant j \leqslant r$, est stable par tous les u_i. Soit j dans $\{1, \dots, r\}$. Pour tout i, l'induit de u_i sur E_j est diagonalisable (le polynôme minimal de cet induit divise celui de u_i et est donc simplement scindé sur $\mathbf{C}$; voir aussi l'exercice 7.b) ; la famille des induits des u_i sur E_j est donc une famille commutative d'endomorphismes diagonalisables de E_j. Par hypothèse de récurrence, il existe une base de E_j constituée de vecteurs propres communs aux induits des u_i sur E_j. Comme

$$E = \bigoplus_{j=1}^{r} E_j,$$

on obtient en concaténant ces bases une base de E dont tous les éléments sont des vecteurs propres communs aux $u_i, i \in I$.

5. Les éléments de $\rho(G)$ annulent le polynôme $X^n - 1$, qui est simplement scindé sur $\mathbf{C}$. Ils commutent deux à deux puisque G est commutatif. Il suffit pour conclure d'appliquer la question précédente.

6. a) La représentation τ est codiagonalisable grâce à la question précédente, ce qui justifie l'existence de θ. Pour g dans G, on dispose de $\lambda(g)$ dans $\mathbb{U}_n$ tel que

$$\forall g \in G, \qquad \tau_g(\theta) = \lambda(g)\theta.$$

C'est-à-dire

$$\forall (g, x) \in G^2, \qquad \theta(x + g) = \lambda(g)\theta(x).$$

Si θ s'annulait en un point, elle serait identiquement nulle grâce à la relation précédente. Il s'ensuit que θ ne s'annule pas. Posons

$$\chi = \frac{\theta}{\theta(e)}.$$

On a, pour g dans G :

$$\lambda(g) = \frac{\theta(g)}{\theta(e)} = \chi(g).$$

Par suite, pour x et y dans G, on a

$$\chi(x+y) = \frac{\theta(x+y)}{\theta(e)} = \lambda(y)\frac{\theta(x)}{\theta(e)} = \lambda(y)\chi(x) = \chi(y)\,\chi(x).$$

L'application χ est un caractère de G colinéaire à θ.

b) Soit $(\theta_i)_{i\in\{0,\ldots,n-1\}}$ une base de codiagonalisation de la représentation τ. Chaque θ_i est colinéaire à un caractère χ_i. On obtient ainsi n caractères distincts de G. Or, la famille des caractères est orthogonale, donc libre. Comme $\mathbf{C}[G]$ est de dimension n, il ne peut y avoir strictement plus de n caractères. En conclusion :

$$\widehat{G} = \{\chi_j \; ; \; j \in \{0, ..., n-1\}\}\,.$$

Le caractère orthogonal de la famille est déjà établi. Il reste à noter que chaque caractère χ_j est à valeurs dans $\mathbb{U}_n$, donc dans $\mathbb{U}$, pour obtenir

$$\langle \chi_j, \chi_j \rangle = 1$$

et achever la démonstration.

7. Décomposons f sur la base orthonormée des caractères. Le coefficient du caractère χ dans cette décomposition n'est autre que

$$\langle \chi, f \rangle = \frac{1}{n} \sum_{g\in G} \overline{\chi(g)}\; f(g) = \frac{\widehat{f}(\chi)}{n},$$

d'où le résultat.

I.C. Le principe d'incertitude de Donoho-Stark

8. On a, pour χ dans $\widehat{G}$:

$$\left|\widehat{f}(\chi)\right| = \left|\sum_{g\in S(f)} \overline{\chi(g)}f(g)\right| \leqslant \sum_{g\in G} |\chi(g)|\, \|f\|_{\infty,G}$$

soit, puisque χ prend ses valeurs dans $\mathbb{U}$:

$$\left|\widehat{f}(\chi)\right| \leqslant |S(f)|\, \|f\|_{\infty,G}.$$

Par conséquent

$$(1) \qquad \|\widehat{f}\|_{\infty,\widehat{G}} \leqslant |S(f)|\, \|f\|_{\infty,G}.$$

La formule d'inversion de Fourier de la question 7 implique par ailleurs, via un raisonnement analogue que, pour g dans G :

$$|f(g)| \leqslant \frac{|S(\widehat{f})|\, \|\widehat{f}\|_{\infty,\widehat{G}}}{n}.$$

Par conséquent

$$(2) \qquad \|f\|_{\infty,G} \leqslant \frac{|S(\widehat{f})|\, \|\widehat{f}\|_{\infty,\widehat{G}}}{n}.$$

En combinant (1) et (2), et en tenant compte du fait que $\widehat{f}$ n'est pas nulle (sinon f le serait aussi grâce à la formule d'inversion de Fourier), on obtient bien :

$$|S(f)|\, |S(\widehat{f})| \geqslant n.$$

9. a) Un caractère de G/H donne, en composant avec la surjection canonique de G sur G/H, un caractère de G trivial sur H, c'est-à-dire un élément de $H^{\perp}$. Inversement, si χ est un élément de $H^{\perp}$, le noyau de χ contient H, ce qui permet de définir par passage au quotient un élément $\tilde{\chi}$ de $\widehat{G/H}$. Ces deux points établissent que le morphisme

$$\chi \in H^{\perp} \longmapsto \tilde{\chi} \in \widehat{G/H}$$

est un isomorphisme de groupes.

b) Soit χ dans $\widehat{G}$. Alors

$$\widehat{1_H}(\chi) = \sum_{g\in H} \overline{\chi(g)}.$$

Si χ est dans $H^{\perp}$, cette somme vaut $|H|$. Sinon, la restriction de χ à H est un élément non trivial de $\widehat{H}$ et la question 3 garantit que cette somme est nulle, d'où le résultat.

c) Le support de 1_H est H, celui de $\widehat{1_H}$ est $H^{\perp}$. Il s'ensuit en utilisant a) puis l'égalité de $|G/H|$ et de $|\widehat{G/H}|$ démontrée en 6.b), que

$$|S(1_H)|\, |S(\widehat{1_H})| = |H|\, |H^{\perp}| = |H|\, |\widehat{G/H}| = |H|\, |G/H| = |G| = n.$$

10. a) Le sous-groupe de G engendré par la classe de $p^{\alpha-\beta}$ est de cardinal p^{β}.

b) Le théorème de structure des groupes abéliens finis et le théorème chinois assurent que G est produit direct de p-groupes cycliques. Notons $d_1, \ldots, d_r$ les ordres de ces groupes. Un diviseur d de $n = d_1 \times \cdots \times d_r$ est de la forme $d'_1 \times \cdots \times d'_r$ où, pour tout i, d'_i est un diviseur de d_i. En appliquant a) et en utilisant le fait que l'ordre d'un produit est le produit des ordres, on obtient le résultat désiré.

c) La question 8 assure que

$$|S(f)| + |S(\widehat{f})| \geqslant 2\sqrt{|S(f)|\,|S(\widehat{f})|} \geqslant 2\sqrt{n}.$$

Par ailleurs, la question b) assure que G contient un sous-groupe H de cardinal $\sqrt{n}$. Si $f = 1_H$, alors, par 9.c) :

$$|S(f)| + |S(\widehat{f})| = 2\sqrt{n}.$$

II. Principe d'incertitude pour les groupes d'ordre premier

I.A. Détermination d'un anneau quotient

11. a) La famille $(x^i)_{i\in\{0,\ldots,d-1\}}$ est libre, sans quoi il existerait un élément non nul et de degré au plus $d-1$ de $\mathbf{Q}[X]$ annulant x. Elle est également génératrice : en effet, si y est dans $\mathbf{Q}[x]$, on dispose de P dans $\mathbf{Q}[X]$ tel que $y = P(x)$. Si R est le reste de la division euclidienne de P par Π, $y = R(x)$ d'où, puisque R est de degré au plus $d-1$, le fait que y est combinaison $\mathbf{Q}$-linéaire de $(x^i)_{i\in\{0,\ldots,d-1\}}$. Ainsi, $(x^i)_{i\in\{0,\ldots,d-1\}}$ est une base de $\mathbf{Q}[x]$ sur $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{Q}[x]$ est un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel de dimension d.

    b) L'application

    $$Q \in \mathbf{Q}[X] \longmapsto Q(x) \in \mathbf{C}$$

    est un morphisme d'anneaux d'image $\mathbf{Q}[x]$ et de noyau $\Pi\mathbf{Q}[x]$. Il s'ensuit que l'anneau $\mathbf{Q}[x]$ est isomorphe à $\mathbf{Q}[X]/(\Pi)$. Or, Π est un irréductible de l'anneau principal $\mathbf{Q}[X]$, donc $\mathbf{Q}[X]/(\Pi)$ est un sous-corps de $\mathbf{C}$ [8].

    c) Comme $\mathbf{Q}[x]$ est un sous-corps de $\mathbf{C}$ contenant $\mathbf{Z}[x]$, il contient le corps des fractions de $\mathbf{Z}[x]$. Reste à établir l'inclusion réciproque. Soit y dans $\mathbf{Q}[x]$: il existe clairement q dans $\mathbf{N}^*$ tel que qy appartienne à $\mathbf{Z}[x]$, ce qui établit le résultat.

12. a) Tout d'abord, l'irréductibilité dans $\mathbf{Z}[X]$ d'un polynôme unitaire de $\mathbf{Z}[X]$ implique son irréductibilité dans $\mathbf{Q}[X]$ [9]. Ensuite, l'application

    $$A \in \mathbf{Z}[X] \longmapsto A(X+1) \in \mathbf{Z}[X]$$

    est un automorphisme de l'anneau $\mathbf{Z}[X]$ de sorte qu'un élément P de $\mathbf{Z}[X]$ est un irréductible de $\mathbf{Z}[X]$ si et seulement si tel est le cas de $P(X+1)$. Montrons donc que $\Pi_p(X+1)$ est un irréductible de $\mathbf{Z}[X]$. On écrit

    $$\Phi_p(X+1) = \frac{(X+1)^p - 1}{X} = X^{p-1} + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} X^{k-1}.$$

    Les $\binom{p}{k}$ pour $k \in \{1,\ldots,p-1\}$ sont classiquement divisibles par p, alors que $\binom{p}{1} = p$ n'est pas divisible par p^2. Le critère d'Eisenstein permet de conclure.

    b) Puisque Φ_p est irréductible sur $\mathbf{Q}$ et unitaire, c'est le polynôme minimal de ε sur $\mathbf{Q}$. La question 11.a) entraîne que $\mathbf{F}$ est de dimension $p-1$ sur $\mathbf{Q}$.

8. De manière plus directe, mais équivalente quant au fond, on peut utiliser une relation de Bézout.
9. Conséquence du lemme de Gauss sur les contenus.

13. a) On a immédiatement

$$\mu_{xy} = \mu_x \circ \mu_y,$$

d'où, en prenant les déterminants :

$$N(xy) = N(x)N(y).$$

b) Écrivons

$$x = P(\varepsilon) \quad \text{avec} \quad P = \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k \text{ dans } \mathbf{Z}[X].$$

Alors

$$\mu_x(\varepsilon^j) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k \varepsilon^{k+j}.$$

Comme les ε^{k+j} sont dans $\mathbf{Z}[\varepsilon]$, ils se décomposent comme combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbf{Z}$ des ε^i, $i \in \{0, ..., p-2\}$. La matrice de μ_x dans la base $(\varepsilon^i)_{i\in\{0,...,p-2\}}$ de $\mathbf{F}$ sur $\mathbf{Q}$ appartient à $\mathcal{M}_{p-1}(\mathbf{Z})$, son polynôme caractéristique μ_x est dans $\mathbf{Z}[X]$.

c) Si x est inversible dans $\mathbf{A}$, on dispose de y dans $\mathbf{A}$ tel que $xy = 1$, d'où

$$N(x)\ N(y) = 1.$$

Comme $N(x)$ et $N(y)$ sont dans $\mathbf{Z}$ d'après b), c'est que $N(x)$ vaut 1 ou -1.

Supposons réciproquement que $N(x)$ vaut 1 ou -1. Le théorème de Cayley-Hamilton implique

$$\chi_{\mu_x}(\mu_x) = 0.$$

Or, pour P dans $\mathbf{Q}[X]$, on a

$$P(\mu_x) = \mu_{P(x)}.$$

Il vient ainsi

$$0 = \mu_{\chi_{\mu_x}(x)}.$$

En testant sur 1, on a que χ_{μ_x} annule x. Comme le terme constant de χ_{μ_x} vaut 1 ou -1, on en tire que l'inverse de x dans $\mathbf{F}$ est dans $\mathbf{Z}[x]$ donc dans $\mathbf{A}$.

d) On a

$$\mu_{1-\varepsilon} = \mathrm{Id}_{\mathbf{F}} - \mu_\varepsilon.$$

La matrice de μ_ε dans la base $(\varepsilon^i)_{i\in\{0,...,p-2\}}$ de $\mathbf{F}$ est la matrice compagnon de Φ_p. Son polynôme caractéristique est donc Φ_p, qui est simplement scindé sur $\mathbf{F}$ et admet pour racines les ε^i pour $i \in \{0, ..., p-2\}$. Cette matrice est donc diagonalisable sur $\mathbf{F}$, semblable à Diag $(\varepsilon, \dots, \varepsilon^{p-2})$. Il s'ensuit que

$$N(1-\varepsilon) = \prod_{i=1}^{p-2} (1-\varepsilon^i) = \Phi_p(1) = p.$$

14. a) On a bien sûr

$$\varepsilon \equiv 1\ [\mathcal{I}],$$

d'où

$$\forall P \in \mathbf{Z}[X], \qquad P(\varepsilon) \equiv P(1)\ [\mathcal{I}].$$

Comme

$$\mathbf{A} = \{P(\varepsilon)\ \ P \in \mathbf{Z}[X]\},$$

on en déduit que tout élément de $\mathbf{A}$ est congru modulo $\mathcal{I}$ à un élément de $\mathbf{Z}$, i.e.

$$\varphi(\mathbf{Z}) = \mathbf{A}/\mathcal{I}.$$

b) La relation obtenue dans la question précédente

$$p = \prod_{i=1}^{p-2}(1-\varepsilon^i)$$

entraîne que p appartient à $\mathcal{I}$.

c) La restriction de φ à $\mathbf{Z}$ a pour image $\mathbf{A}/\mathcal{I}$. Puisque φ est un morphisme d'anneaux, il suffit de voir que le noyau $\mathcal{I} \cap \mathbf{Z}$ de cette restriction est égal à $p\mathbf{Z}$ pour conclure. La question précédente montre que $\mathcal{I} \cap \mathbf{Z}$, qui est un idéal de $\mathbf{Z}$, contient $p\mathbf{Z}$. Il est donc égal à $\mathbf{Z}$ ou à $p\mathbf{Z}$. Dans le premier cas, l'anneau $\mathbf{A}/\mathcal{I}$ serait nul. Comme

$$\mathcal{I} = (1-\varepsilon)\mathbf{A},$$

il en résulterait que $1-\varepsilon$ est un inversible de $\mathbf{A}$. Les questions 11.c) et 11.d) montrent que tel n'est pas le cas.

II.B. Un théorème de Tchebotarev

15. On écrit

$$P = (X - x_0)^r Q \quad \text{avec} \quad Q \in \mathbf{K}[X].$$

Il s'ensuit que

$$P' = r(X - x_0)^{r-1}Q + (X - x_0)^r Q'$$

est divisible par $(X - x_0)^{r-1}$. Une récurrence immédiate montre alors que, pour i dans $\{0, \ldots, k-1\}$, $(X - x_0)^{r-i}$ divise $P^{(i)}$. Le résultat demandé s'en déduit immédiatement [10].

16. Première implication. Si la matrice $A_{I,J}$ n'était pas dans $\mathrm{GL}_r(\mathbf{F})$, on disposerait d'une relation de liaison non triviale à coefficients dans $\mathbf{F}$ entre ses lignes, donc d'un polynôme non nul de la forme $P_{I,\lambda}$ s'annulant sur les ε^j pour j dans J. C'est contradictoire.

Deuxième implication. Une matrice de $\mathcal{M}_r(\mathbf{F})$ inversible dans cet anneau l'est a fortiori dans $\mathcal{M}_r(\mathbf{C})$.

Troisième implication. C'est le même argument que pour la première implication, en remplaçant $\mathbf{F}$ par $\mathbf{C}$ et en utilisant le fait que l'appartenance à $\mathrm{GL}_r(\mathbf{C})$ de la matrice $A_{I,J}$ interdit toute relation de liaison non triviale à coefficients dans $\mathbf{C}$ entre ses lignes.

Quatrième implication. Immédiate, au vu de l'inclusion $\mathbf{F} \subset \mathbf{C}$.

17. a) Par hypothèse, on dispose de P dans $\mathbf{F}[X]$ de la forme

$$\sum_{\ell=1}^{r} \lambda_\ell X^{i_\ell}$$

avec $0 \leqslant i_1 < \cdots < i_r$ et d'une partie J de $\mathcal{P}_r$ tel que P s'annule sur les ε^j, $j \in J$. Quitte à multiplier P par un élément non nul de $\mathbf{A}$ (et même de $\mathbf{N}^*$), on peut, grâce à la question 11.c), supposer P à coefficients dans $\mathbf{A}$. Reste à voir que l'on peut, quitte à diviser P par une puissance

10. En revanche, la formule de Taylor n'a plus de sens (impossibilité de diviser par les factorielles) et on perd donc l'expression de la multiplicité d'une racines à l'aide des dérivées.

convenable de $1-\varepsilon$, supposer que l'un des coefficients de P n'est pas dans $\mathcal{I}$. Ce point vient d'un résultat de finitude : si z est un élément non nul de $\mathbf{A}$, l'ensemble

$$\{j \in \mathbf{N}\ ;\ (1-\varepsilon)^j | z\}$$

est fini. En effet, si

$$z = (1-\varepsilon)^j z' \qquad \text{avec} \quad z' \in \mathbf{A},$$

alors, grâce aux questions 13.a) et 13.d),

$$N(z) = N((1-\varepsilon)^j)\ N(z') = p^j N(z').$$

Or N envoie $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{Z}$ d'après la question 13.b). D'autre part, μ_z est inversible, donc son déterminant $N(z)$ n'est pas nul. Le résultat suit.

b) La division euclidienne d'un polynôme de $\mathbf{A}[X]$ par un polynôme unitaire de $\mathbf{A}[X]$ s'effectue dans $\mathbf{A}[X]$. On peut donc écrire :

$$P = \prod_{k=1}^{r} (X - \varepsilon^{j_k})\ Q, \quad \text{où} \quad Q \in \mathbf{A}[X].$$

Comme tous les ε^j sont congrus à 1 modulo $\mathcal{I}$, on déduit de cette égalité, par réduction modulo $\mathcal{I}$, la relation

$$\tilde{P} = (X - \tilde{1})^r\ \tilde{Q}.$$

La conclusion résulte alors de la question 15.

c) Ainsi

$$\forall k \in \{0, \ldots, r-1\}, \qquad \sum_{\ell=1}^{r} \tilde{\lambda_\ell} \left(\prod_{j=0}^{k-1} (\tilde{i_\ell} - \tilde{j}) \right) = \tilde{0}.$$

Par combinaisons linéaires, on a, pour tout Q de $\mathbf{A}/\mathcal{I}[X]$ de degré au plus $r-1$

$$\sum_{\ell=1}^{r} \tilde{\lambda_\ell} Q(\tilde{i_\ell}) = \tilde{0}.$$

Comme les i_ℓ sont dans $\{0, \ldots, p-1\}$ et deux à deux distincts, il en est de même de leurs classes, grâce à la question 14. Fixons ℓ' dans $\{1, \ldots, p-1\}$ et choisissons

$$Q = \prod_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant r \\ \ell \neq \ell'}} (X - i_\ell).$$

On en déduit que $\tilde{\lambda_{\ell'}}$ est nul. Tous les coefficients de P sont donc dans $\mathcal{I}$, d'où la contradiction voulue.

II.C. Le principe d'incertitude de Tao

18. Soit f dans $\mathbf{C}[G]\backslash\{0\}$. Les caractères de G sont les χ_k de la question 2. La transformée de Fourier de f est donnée par

$$\widehat{f}(\chi_k) = \sum_{x\in S(f)} \overline{\chi_k(x)}\, f(x) = \sum_{x\in S(f)} \exp\left(-\frac{2i\pi kx}{p}\right)\, f(x).$$

Les résultats des questions 16 et 17 montrent alors que le cardinal de l'ensemble des k de $\{0,\dots,p-1\}$ tels que

$$\widehat{f}(\chi_k) = 0$$

est majoré par $|S(f)|-1$. Autrement dit

$$p - |S(\widehat{f})| \leqslant |S(f)| - 1,$$

soit encore [11]

$$|S(f)| + |S(\widehat{f})| \geqslant p + 1.$$

Il reste à déterminer une f telle que cette inégalité soit une égalité. Pour $f = 1_{\{0\}}$, la question 9.b) montre que

$$S(\widehat{f}) = \varnothing.$$

Donc

$$|S(f)| + |S(\widehat{f})| = p + 1.$$

19. Les deux espaces S_A et $\mathbf{C}^B$ sont de dimension r. Il suffit donc d'établir l'injectivité de $T_{A,B}$ pour conclure. Prenons donc f dans le noyau de $T_{A,B}$. Alors

$$S(f) \subset A \quad \text{et} \quad S(\widehat{f}) \subset \widehat{G}\backslash B.$$

Il s'ensuit que

$$|S(f)| + |S(\widehat{f})| \leqslant |A| + p - |B|,$$

autrement dit

$$|S(f)| + |S(\widehat{f})| \leqslant p.$$

La question précédente entraîne alors que $f = 0$.

20. a) L'hypothèse entraîne que A et B ne sont pas vides. Fixons un élément χ de B. Alors $(\widehat{G}\backslash B)\cup\{\chi\}$ est de cardinal $p+1-|B| = |A|$. Il reste à poser

$$C = (\widehat{G}\backslash B) \cup \{\chi\}.$$

b) D'après la question 19, l'application $T_{A,C}$ est un isomorphisme de S_A sur $\mathbf{C}^C$. Il existe donc f dans S_A telle que la restriction de $\widehat{f}$ à C soit l'indicatrice de $\{\chi\}$. Le support de f est contenu dans A, celui de $\widehat{f}$ dans $(G\backslash C) \cup \{\chi\}$, c'est-à-dire, au vu des cardinaux, dans B. L'inégalité

$$|S(f)| + |S(\widehat{f})| \geqslant |A| + |B|.$$

montre que les inclusions

$$S(f) \subset A \quad \text{et} \quad S(\widehat{f}) \subset B$$

sont des égalités.

11. On comparera ce résultat avec celui de la question 10.c.

II.D. Application à l'inégalité de Cauchy-Davenport

21. On considère d'abord le cas où $|A|+|A'|>p$. Dans ce cas, pour g dans G, $g-A$ et A' ne peuvent être disjoints (la somme de leurs cardinaux est $>p$) ; g est dans $A+A'$ et, finalement, on a $A+A'=G$.

    Lorsque $|A|+|A'|\leqslant p$, on considère B et B' deux parties de $\widehat{G}$ telles que

    $$|B| = p+1-|A| \quad \text{et} \quad |B'| = p+1-|A'|$$

    et dont l'intersection est de cardinal aussi petit que possible, c'est-à-dire

    $$|B\cap B'| = p+2-|A|-|A'|.$$

    La question 20 donne f et g dans $\mathbf{C}[G]$ telles que

    $$S(f)=A, \quad S(g)=A', \quad S(\widehat{f})=B, \quad S(\widehat{g})=B'.$$

    Un calcul simple montre que la transformée de Fourier de $f*g$ est

    $$\widehat{f*g} = \widehat{f}\,\widehat{g},$$

    d'où

    $$S(\widehat{f*g}) = S(\widehat{f})\cap S(\widehat{g}) = B\cap B',$$

    alors que, par définition de $f*g$:

    $$S(f*g)\subset S(f)+S(g).$$

    On a donc

    $$|A+A'| \geqslant p+1-|B\cap B'| = -1+|A|+|A'|,$$

    ce qui achève la démonstration.

Problème 2 – Mesures cristallines

I. Préliminaires

I.A. Formule de Poisson

1. La relation

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_k(f)| < +\infty$$

assure que la série de fonctions considérée converge normalement sur $\mathbf{R}$. Chaque terme de la somme étant une fonction continue 1-périodique, il en est de même de g. Enfin, si n est dans $\mathbf{Z}$, la série de fonction de terme général

$$x \longmapsto c_k(f)\, e^{2i\pi((k-n)x)}, \quad k \in Z$$

converge normalement, donc uniformément, sur le segment $[0,1]$, ce qui légitime l'intégration terme à terme :

$$\int_0^1 g(x)e^{-2i\pi nx}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)\int_0^1 e^{2i\pi(k-n)x}\,\mathrm{d}x = c_n(f).$$

Les fonctions f et g sont 1-périodiques, continues sur $\mathbf{R}$ et ont mêmes coefficients de Fourier 1-périodiques : elles sont égales [12].

2. a) Soit T dans $\mathbf{R}^{+*}$. Pour k dans $\mathbf{Z}$ tel que $|k| \geqslant T$, on a

$$\forall x \in [-T, T], \qquad |f(x+k)| \leqslant \frac{C}{(1+|x+k|)^\alpha} \leqslant \frac{C}{(1+|k|-T)^\alpha}.$$

Le majorant est le terme général d'une série convergente indépendante de x, ce qui entraîne que la série de fonctions considérée converge normalement, donc uniformément, sur tout segment de $\mathbf{R}$. Chaque fonction

$$x \longmapsto f(x+k)$$

est continue sur $\mathbf{R}$, donc F est continue sur $\mathbf{R}$. Le caractère bijectif de la translation par 1 sur $\mathbf{Z}$ montre que F est 1-périodique.

b) On peut appliquer le résultat de a) (l'hypothèse est plus forte, puisque elle permet de majorer $|f|$ et $|\widehat{f}|$). On calcule les coefficients de Fourier 1-périodiques de F : pour n dans $\mathbf{Z}$, la convergence normale de la série de fonctions définissant F sur $[0,1]$ justifie l'intégration terme à terme, d'où

$$c_n(F) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 f(x+k)e^{-2i\pi nx}\,\mathrm{d}x.$$

Mais, pour k dans $\mathbf{Z}$, le changement de variable $y = x + k$ fournit :

$$\int_0^1 f(x+k)e^{-2i\pi nx}\,\mathrm{d}x = \int_k^{k+1} f(y)e^{-2i\pi ny}\,\mathrm{d}y.$$

Par conséquent

$$c_n(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-2i\pi ny}\,\mathrm{d}y = \widehat{f}(n).$$

12. Ce résultat d'unicité est une conséquence immédiate de la convergence de la série de Fourier dans L^2, ou, de manière équivalente, de la formule de Parseval. On peut aussi le déduire directement du théorème d'approximation de Weierstrass trigonométrique.

La majoration de $|\widehat{f}|$ entraîne que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(F)| < +\infty.$$

On peut alors appliquer à la fonction F le résultat de la question 1, ce qui permet de conclure.

I.B. Gaussiennes et fonction thêta de Jacobi

3. On pose

$$\forall (x,\xi) \in \mathbf{R}^2, \qquad u(x,\xi) = \exp(-\pi x^2 - 2i\pi x\xi).$$

La fonction u est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^2$. Pour ξ dans $\mathbf{R}$, $u(\cdot,\xi)$ est dans $\mathcal{S}$ donc intégrable sur $\mathbf{R}$ et

$$\forall (x,\xi) \in \mathbf{R}^2, \qquad \frac{\partial u}{\partial \xi}(x,\xi) = -2i\pi x u(x,\xi).$$

Donc

$$\forall (x,\xi) \in \mathbf{R}^2, \qquad \left|\frac{\partial u}{\partial \xi}(x,\xi)\right| = 2\pi\ |x|\ \exp(-\pi x^2).$$

La fonction de x du second membre est $O(1/x^2)$ en $\pm\infty$ et continue sur $\mathbf{R}$, donc intégrable sur $\mathbf{R}$. Pour tout nombre réel x, la fonction $\frac{\partial u}{\partial \xi}(x,\cdot)$ est continue sur $\mathbf{R}$. Le théorème de dérivation sous le signe $\int$ assure que $\widehat{g}$ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$, avec

$$\forall \xi \in \mathbf{R}, \qquad \widehat{g}'(\xi) = -\int_{-\infty}^{+\infty} 2i\pi x e^{-\pi x^2} e^{-2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}x.$$

On intègre alors par parties, en posant, pour x dans $\mathbf{R}$:

$$u(x) = -e^{-\pi x^2} \quad \text{d'où} \quad u'(x) = 2\pi\ x\ e^{-\pi x^2},$$

$$v(x) = -ie^{-2i\pi x\xi} \quad \text{d'où} \quad v'(x) = -2\pi\ \xi\ e^{-2i\pi x\xi}.$$

La fonction uv tend vers 0 en $\pm\infty$, donc

$$\forall \xi \in \mathbf{R}, \qquad \widehat{g}'(\xi) = -2\pi\xi\widehat{g}(\xi).$$

Il en résulte, par intégration de cette équation différentielle, que

$$\forall \xi \in \mathbf{R}, \qquad \widehat{g}(\xi) = \widehat{g}(0)e^{-\pi\xi^2}.$$

Comme

$$\widehat{g}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g = 1,$$

il vient bien

$$\widehat{g} = g.$$

4. a) On a

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad g_t(x) = g(\sqrt{t}x).$$

Par conséquent

$$\forall \xi, \in \mathbf{R}, \qquad \widehat{g_t}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{t}}\widehat{g}\left(\frac{\xi}{\sqrt{t}}\right) = \frac{1}{\sqrt{t}}g\left(\frac{\xi}{\sqrt{t}}\right).$$

b) Appliquons la formule sommatoire de POISSON de la question 2 à la fonction g_t. Il vient

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t(x+k)^2} = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x/t}.$$

En prenant $x = 0$, on en déduit

$$\theta(t) = \sqrt{\frac{1}{t}}\, \theta\left(\frac{1}{t}\right).$$

I.C. Base hilbertienne d'HERMITE

5. Pour n dans $\mathbf{N}$, on a

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad h^{(n)}(x) = (-1)^n\ H_n(x)\ \exp(-2\pi x^2),$$

d'où en dérivant

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad h^{(n+1)}(x) = (-1)^n\ \big(H_n'(x) - 4\pi x H_n(x)\big) \exp(-2\pi x^2).$$

On a donc

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad H_{n+1}(x) = 4\pi x H_n(x) - H_n'(x).$$

Cette formule et la relation $H_0 = 1$ permettent d'établir par récurrence que, pour tout n dans $\mathbf{N}$, H_n est un polynôme dont le terme de plus haut degré est $(4\pi)^n X^n$.

6. a) On démontre le résultat par récurrence sur k, en intégrant par parties. Pour $k = 0$, la propriété est évidente. On la suppose vraie pour k dans $\{0, \ldots, n-1\}$, avec $n \geqslant 1$. On intègre par parties en posant

$$u(x) = h^{(n-k-1)}(x) \quad \text{et} \quad v(x) = H_m^{(k)}(x),$$
$$u'(x) = h^{(n-k)}(x) \quad \text{et} \quad v'(x) = H_m^{(k+1)}(x),$$

La fonction uv est de la forme Ph où P est un polynôme, donc tend vers 0 en $\pm\infty$. Le crochet est nul et on obtient

$$\langle \Psi_m, \Psi_n \rangle = (-1)^{n+k+1} \int_{-\infty}^{+\infty} h^{(n-k-1)}(x)\ H_m^{(k+1)}(x)\, \mathrm{d}x.$$

b) Supposons $n > m$. On applique la formule de la question a) à $k = m+1$. Comme H_m est de degré m, $H_m^{(m+1)}$ est nul et

$$\langle \Psi_m, \Psi_n \rangle = 0.$$

L'orthogonalité est établie. Lorsque $m = n$, on applique la formule précédente à $k = n$ et il vient

$$\langle \Psi_n, \Psi_n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} h\ H_n^{(n)}.$$

Vu le terme de plus haut degré de H_n, on a

$$H_n^{(n)} = 4^n \pi^n n!.$$

Par conséquent

$$\|\Psi_n\| = \frac{2^n\ \pi^{n/2}\ \sqrt{n!}}{2^{1/4}}.$$

7. a) La fonction F est intégrable comme produit de deux fonctions de L^2.

Pour z dans $\mathbf{C}$, la fonction

$$x \longmapsto \exp(-\pi x^2)\ f(x)\ \exp(-izx)$$

est intégrable sur $\mathbf{R}$. En effet, posant $z = u + iv$ avec u et v dans $\mathbf{R}$,

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad |\exp(-\pi x^2)\ \exp(-izx)| = \exp(-\pi x^2 + vx),$$

ce qui montre que

$$x \in \mathbf{R} \longmapsto |\exp(-\pi x^2)\ \exp(-izx)| = \exp(-\pi x^2 + vx),$$

est dans L^2, de sorte que le produit de cette fonction par f est intégrable comme produit de deux éléments de L^2. La fonction $\widehat{F}$ est ainsi la restriction à $\mathbf{R}$ de la fonction G définie sur $\mathbf{C}$ par

$$\forall z \in \mathbf{C}, \qquad G(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\pi x^2)\ f(x)\ \exp(-izx)\ \mathrm{d}x.$$

Il reste à voir que G est une fonction entière. On peut par exemple utiliser la régularité d'une intégrale à paramètre holomorphe. Pour x dans $\mathbf{R}$, la fonction

$$z \longmapsto \exp(-\pi x^2)\ f(x)\ \exp(-izx)$$

est entière. Si r est dans $\mathbf{R}^{+*}$ et si $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant r$, alors

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad |\exp(-\pi x^2)\ f(x)\ \exp(-izx)| \leqslant \exp(-\pi x^2 + r|x|)\ |f(x)|.$$

La fonction majorante est indépendante de z et intégrable (toujours comme produit de deux éléments de L^2), d'où le résultat [13].

b) La solution de la question a) légitime l'emploi du théorème relatif aux intégrales à paramètre holomorphe. Ce dernier assure que G est dérivable au sens complexe sur $\mathbf{C}$, avec

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall z \in \mathbf{C}, \qquad G^{(n)}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-i)^n x^n \exp(-\pi x^2)\ f(x)\ \exp(-izx)\,\mathrm{d}x.$$

En particulier

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad G^{(n)}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-i)^n x^n \exp(-\pi x^2)\ f(x)\ \mathrm{d}x = 0.$$

Puisque G est une fonction entière, il s'ensuit que F est identiquement nulle. En considérant la restriction de G à l'axe réel, on obtient que $\widehat{F}$ est identiquement nulle, d'où il découle, par injectivité de la transformation de Fourier sur l'espace des fonctions intégrables sur $\mathbf{R}$, et puisque exp ne s'annule pas, que f est l'élément nul de L^2.

c) La suite $(\psi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est orthonormée par construction. Comme $(H_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une famille à degrés échelonnés de $\mathbf{C}[X]$, donc une base de cet espace, il découle de la question b) que le seul vecteur de L^2 orthogonal à tous les ψ_n, $n \in \mathbf{N}$, est le vecteur nul. On en déduit que le sous-espace de L^2 engendré par $(\psi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est dense dans L^2, ce qui complète la vérification.

13. On peut également développer G en série entière de rayon infini en utilisant une permutation somme-intégrale facile à justifier.

8. a) Commençons par noter que, via une intégration par parties, on a

$$\forall (u,v) \in \mathcal{S}^2, \qquad \left\langle u', v \right\rangle = -\left\langle u, v' \right\rangle,$$

d'où

$$\forall (u,v) \in \mathcal{S}^2, \qquad \left\langle u'', v \right\rangle = -\left\langle u', v' \right\rangle = \left\langle u, v'' \right\rangle.$$

D'autre part, si p est un polynôme, il est immédiat que $\mathcal{S}$ est stable par multiplication par p et que

$$\forall (u,v) \in \mathcal{S}^2, \qquad \langle u, pv \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} upv = \int_{-\infty}^{+\infty} puv = \langle pu, v \rangle.$$

On en déduit immédiatement le résultat.

b) La relation proposée est immédiate. En la dérivant $n+1$ fois et en utilisant la formule de Leibniz, il vient

$$(1) \qquad \forall x \in \mathbf{R}, \qquad h^{(n+2)}(x) = -4\pi x h^{(n+1)}(x) - 4\pi(n+1)h^{(n)}(x).$$

D'autre part, en dérivant deux fois la relation

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad \Psi_n(x) = (-1)^n \, e^{\pi x^2} h^{(n)}(x),$$

il vient

$$(2) \qquad \forall x \in \mathbf{R}, \qquad \Psi_n''(x) = (-1)^n e^{\pi x^2} \left(h^{(n+2)}(x) + 4\pi x h^{(n+1)}(x) + (4\pi^2 x^2 + 2\pi) h^{(n)}(x) \right).$$

En tenant compte des relations (1) et (2), on obtient

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad \Psi_n''(x) = (4\pi^2 x^2 - 4\pi(n+1) + 2\pi)\Psi_n(x).$$

On en déduit le résultat désirée, avec

$$\mu_n = 2\pi(2n+1).$$

c) On a donc, pour n dans $\mathbf{N}$:

$$\langle T(f), \psi_n \rangle = \langle f, T(\psi_n) \rangle = \mu_n \, \langle f, \psi_n \rangle.$$

Par récurrence sur ℓ, il vient :

$$\forall (\ell, n) \in \mathbf{N}^2, \qquad \left\langle T^\ell(f), \psi_n \right\rangle = \mu_n^\ell \, \langle f, \psi_n \rangle.$$

Comme $T^\ell(f)$ est dans L^2, la formule de Parseval [14] fournit l'égalité ci-après, qui implique le résultat :

$$\|T^\ell(f)\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} {\mu_n}^{2\ell} \, |\langle \psi_n, f \rangle|^2.$$

14. L'inégalité de Bessel est ici suffisante.

II. Mesures cristallines

II.A. Mesures purement atomiques

9. a) Il suffit d'écrire

$$\Lambda = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (\Lambda \cap [-n, n])$$

et de noter qu'une réunion dénombrable d'ensembles finis est au plus dénombrable.

b) Soit R dans $\mathbf{R}^{+*}$. Alors, pour f dans $\mathcal{D}$ nulle hors de $[-R, R]$,

$$|\mu(f)| \leqslant \left(\sum_{\lambda \in \Lambda \cap [-R,R]} |c_\lambda| \right) p_{0,0}(f).$$

c) Supposons $\Lambda \neq \varnothing$. Soient λ dans Λ, δ dans $\mathbf{R}^{+*}$ tel que

$$[\lambda - \delta, \lambda + \delta] \cap \Lambda = \{\lambda\}.$$

On dispose de f dans $\mathcal{D}$ strictement positive sur $]\lambda - \delta, \lambda - \delta[$ et nulle ailleurs. Alors

$$\mu(f) = c_\lambda f(\lambda) \neq 0,$$

contradiction.

II.B. Distributions tempérées

10. a) Soit m dans $\mathbf{N}$ tel que

$$r - \varepsilon m < -1.$$

Comme f est dans $\mathcal{S}$, la fonction f vérifie

$$f(x) \underset{x \to \pm\infty}{=} O(x^{-m}).$$

Il en résulte que

$$c_n f(\lambda_n) \underset{n \to \pm\infty}{=} O(\lambda_n^{r - \varepsilon m}).$$

La sommabilité de la famille $(c_n f(\lambda_n))_{n \in \mathbf{Z}}$ en découle.

b) On reprend la démonstration de a). Pour n dans $\mathbf{Z}^*$:

$$|f(\lambda_n)| \leqslant |\lambda_n|^{-m} N_m(f), \quad \text{donc} \quad |c_n f(\lambda_n)| \leqslant |c_n| \, |\lambda_n|^{-p} N_p(f) \leqslant \frac{k}{c} |n|^{r - \varepsilon p} N_m(f).$$

Par ailleurs

$$|f(0)| \leqslant N_m(f).$$

Au total

$$|T(f)| \leqslant \left(\frac{2k}{c} \zeta(\varepsilon m - r) + |c_0| \right) N_m(f).$$

Cette inégalité établit que T est dans $\mathcal{S}'$.

11. Les éléments de $\mathcal{S}$ vérifient les hypothèses de la question 2. En particulier, en appliquant la formule sommatoire de Poisson en $x = 0$:

$$\forall f \in \mathcal{S}, \qquad T_0(f) = T_0(\widehat{f}) = \widehat{T_0}(f).$$

Il en résulte bien que T_0 est une mesure cristalline.

12. a) Soit φ dans $\mathcal{D}$ strictement positive sur $]-1,1[$, nulle ailleurs, telle que $\varphi'(0) \neq 0$. Pour λ dans $\mathbf{R}^{+*}$, soit φ_λ l'élément de $\mathcal{D}$ défini par

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad \varphi_\lambda(x) = \varphi(\lambda x).$$

Pour $\lambda \geqslant 1$, φ_λ est nulle hors de $[-1,1]$. Si la restriction de δ' à $\mathcal{D}$ était une distribution tempérée, on aurait une constante $C > 0$ telle que

$$\forall \lambda \in [1,+\infty[, \qquad |\delta'(\varphi_\lambda)| \leqslant C\ \|\varphi_\lambda\|_\infty.$$

Mais

$$\delta'(\varphi_\lambda) = \lambda\ \varphi'(0) \quad \text{alors que} \quad \|\varphi_\lambda\|_\infty = \|\varphi\|_\infty$$

Pour λ assez grand, ces relations sont contradictoires.

b) Considérons φ comme dans la question a). Pour k dans $\mathbf{N}^*$, définissons ψ_k comme l'élément de $\mathcal{D}$ tel que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad \psi_k(x) = \varphi(x-k).$$

La fonction ψ_k est nulle hors de $]k-1,k+1[$. En notant μ la mesure purement atomique de l'énoncé :

$$\mu(\psi_k) = 2^k\ \varphi(0).$$

Or, si μ était la restriction à $\mathcal{D}$ d'une distribution tempérée, on disposerait de C dans $\mathbf{R}^{+*}$ et de m dans $\mathbf{N}$ tels que

$$\forall f \in \mathcal{D}, \qquad |\mu(f)| \leqslant C\ N_m(f).$$

En particulier

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \qquad 2^k\varphi(0) \leqslant C N_m(\psi_k).$$

Mais, vu que toutes les $\psi_k^{(i)}$ s'annulent hors de $]-k-1,k+1[$,

$$N_m(\psi_k) \underset{k\to+\infty}{=} O(k^m).$$

Il y a à nouveau contradiction.

II.C. La mesure cristalline de Guinand-Meyer

13. Posant

$$\forall t \in \mathbf{R}^{+*}, \qquad \theta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 t},$$

on a vu que

$$\forall t \in \mathbf{R}^{+*}, \qquad \theta(t) = \sqrt{\frac{1}{t}}\theta\left(\frac{1}{t}\right).$$

La famille $(e^{-\pi n^2 t})_{n\in\mathbf{Z}}$ est sommable, ce qui justifie que

$$\forall t \in \mathbf{R}^{+*}, \qquad \theta(t)^3 = \sum_{n\in\mathbf{N}} r_3(n)e^{-\pi n t} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} r_3(n)e^{-\pi n t}.$$

De même

$$\forall t \in \mathbf{R}^{+*}, \qquad \left(\sqrt{\frac{1}{t}}\theta\left(\frac{1}{t}\right)\right)^3 = t^{-3/2} + t^{-3/2}\sum_{n=1}^{+\infty} r_3(n)e^{-\pi n t}.$$

Le résultat désiré se déduit donc de l'identité de Jacobi par élévation au cube.

14. Soit n dans $\mathbf{N}^*$. Si x, y, z sont dans $\mathbf{Z}$ et vérifient $x^2+y^2+z^2=n$, alors $|x|, |y|, |z|$ sont majorés par $\sqrt{n}$. On en tire aussitôt

$$r_3(n) \leqslant \left(2\sqrt{n}+1\right)^3 \leqslant (3\sqrt{n})^3.$$

D'où le résultat désiré, en prenant

$$k = 27 \quad \text{et} \quad r = \frac{3}{2}.$$

15. a) Soient t dans $\mathbf{R}^{+*}$, ξ dans $\mathbf{R}$. On a

$$\widehat{\varphi}_t(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\pi t x^2} e^{-2i\pi\xi x}\,\mathrm{d}x.$$

On intègre par parties en posant, pour x dans $\mathbf{R}$,

$$u(x) = -\frac{e^{-\pi t x^2}}{2\pi t} \qquad \text{et} \qquad v(x) = e^{-2i\pi\xi x},$$

d'où

$$u'(x) = x e^{-\pi t x^2} \qquad \text{et} \qquad v'(x) = -2i\pi\xi e^{-2i\pi\xi x}.$$

Le crochet est nul. On en déduit

$$\widehat{\varphi}_t(\xi) = -i\frac{\xi}{t}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t x^2}e^{-2i\pi\xi x}\,\mathrm{d}x = -i\frac{\xi}{t^{3/2}}g\left(\frac{\xi}{\sqrt{t}}\right) = -i\frac{\xi}{t^{3/2}}e^{-\pi\xi^2/t}.$$

b) On a

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \delta_{\sqrt{n}}(\varphi_t) = -\delta_{-\sqrt{n}}(\varphi_t) = \sqrt{n}e^{-\pi t n} \qquad \text{et} \qquad \delta'(\varphi_t) = 1.$$

$$\sigma(\varphi_t) = -2 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} r_3(n)e^{-n\pi t}.$$

$$\widehat{\sigma}(\varphi_t) = \sigma(\widehat{\varphi}_t) = -2\delta'(\widehat{\varphi}_t) + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r_3(n)}{\sqrt{n}}\left(\delta_{\sqrt{n}}(\widehat{\varphi}_t) - \delta_{-\sqrt{n}}(\widehat{\varphi}_t)\right).$$

Mais, d'après la question a) :

$$\delta'(\widehat{\varphi}_t) = -\frac{i}{t^{3/2}},$$

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \qquad \delta_{\sqrt{n}}(\widehat{\varphi}_t) = -i\frac{\sqrt{n}}{t^{3/2}}e^{-\pi n/t} = -\delta_{-\sqrt{n}}(\widehat{\varphi}_t).$$

Ainsi

$$\widehat{\sigma}(\varphi_t) = \frac{2i}{t^{3/2}} - \frac{2i}{t^{3/2}}\sum_{n=1}^{+\infty} r_3(n)e^{-n\pi/t}.$$

La formule désirée se déduit alors de celle de la question 13.

16. a) On utilise le théorème de représentation des distributions tempérées donné dans l'énoncé [15]. On dispose donc de deux entiers naturels m et p et d'une fonction g continue et bornée de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ tels que

$$\forall f \in \mathcal{S}, \qquad T(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \, \frac{\partial^m}{\partial x^m} \left((1+x^2)^p \, f(x)\right) \, \mathrm{d}x.$$

En particulier, pour t dans $\mathbf{R}^{+*}$:

$$U(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \, \frac{\partial^m}{\partial x^m} \left((1+x^2)^p \, xe^{-\pi t x^2}\right) \, \mathrm{d}x.$$

Posons

$$\forall (t,x) \in \mathbf{R}^{+*} \times \mathbf{R}, \qquad v(t,x) = g(x) \, \frac{\partial^m}{\partial x^m} \left((1+x^2)^p \, xe^{-\pi t x^2}\right).$$

Pour x dans $\mathbf{R}$, la fonction $v(.,x)$ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$. Sa dérivée n-ième est donnée par la formule suivante, valable pour (t,x) dans $\mathbf{R}^{+*} \times \mathbf{R}$:

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} v(t,x) = g(x) \, \frac{\partial^m}{\partial x^m} \left(\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left((1+x^2)^p \, xe^{-\pi t x^2}\right)\right) = g(x) \frac{\partial^m}{\partial x^m} \left((1+x^2)^p (-\pi)^n x^{2n+1} e^{-\pi t x^2}\right),$$

Pour obtenir la relation désirée, il reste à justifier la dérivation sous le signe intégrale. La quantité précédente est une combinaison linéaire de termes de la forme

$$(t,x) \longmapsto g(x) x^j t^k e^{-\pi t x^2}.$$

Pour a et b dans $\mathbf{R}^{+*}$ tels que $a < b$, on peut écrire, si t est dans $[a,b]$:

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad \left| g(x) \, x^j \, t^k \, e^{-\pi t x^2} \right| \leqslant \|g\|_\infty \, b^k \, |x^j| \, e^{-\pi a x^2}.$$

Le majorant est indépendant de t et intégrable sur $\mathbf{R}$, ce qui permet de conclure.

b) Il suffit de dériver n fois la relation de la question 15.b) par rapport à t en utilisant la question a) pour obtenir

$$\forall t \in \mathbf{R}^{+*}, \qquad \widehat{\sigma}(\varphi_{t,n}) = -i \, \sigma(\varphi_{t,n}).$$

17. a) Soit f dans $\mathcal{S}$ impaire. Les sommes partielles de cette série de Fourier-Hermite sont de la forme

$$x \longmapsto P(x) e^{-\pi x^2}$$

où P est un polynôme impair [16]. Ces fonctions sont donc des combinaisons linéaires des fonctions $\varphi_{1,n}$, $n \in \mathbf{N}$. Par linéarité de σ et $\widehat{\sigma}$, la relation de la question 16.b) montre que les distributions $\widehat{\sigma}$ et $-i\sigma$ prennent la même valeur sur toute somme partielle de Fourier-Hermite de f. Or, le résultat admis par l'énoncé [17] dit que la série de Fourier-Hermite de f converge vers f dans $\mathcal{S}$. Il en résulte que

$$\widehat{\sigma}(f) = -i\sigma(f).$$

b) Par ailleurs, la distribution σ s'annule manifestement sur toutes les fonctions paires de $\mathcal{S}$. Comme la transformée de Fourier d'une fonction paire est paire, la distribution $\widehat{\sigma}$ s'annule également sur toutes les fonctions paires de $\mathcal{S}$. En utilisant la question a), on en déduit l'égalité

$$\widehat{\sigma} = -i\sigma.$$

15. L'énoncé comporte ici une erreur : toute distribution tempérée est combinaison linéaire de distributions de la forme proposée (énoncé dû à Laurent Schwartz) ; cette correction n'altère pas la suite.

16. Ce point se déduit du fait que $h^{(n)}$ est une fonction ayant la parité de n.

17. Cet énoncé peut d'ailleurs être démontré en utilisant les fonctions d'Hermite.

18. a) Un calcul immédiat fournit l'égalité de la restriction de τ_α à $\mathcal{D}$ et de

$$\left(\alpha^2+\frac{1}{\alpha}\right)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r_3(n)}{\sqrt{n}}\left(\delta_{\sqrt{n}}-\delta_{-\sqrt{n}}\right)-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r_3(n)}{\sqrt{n}}\left(\delta_{\sqrt{n}/\alpha}-\delta_{-\sqrt{n}/\alpha}\right)-\alpha\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r_3(n)}{\sqrt{n}}\left(\delta_{\alpha\sqrt{n}}-\delta_{-\alpha\sqrt{n}}\right).$$

Cette formule permet de conclure via la question 9.b). En effet, la suite $(\sqrt{n})_{n\geqslant 1}$ diverge vers $+\infty$, ce qui implique que, pour tout $R>0$ l'intersection de

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty}\{\pm\sqrt{n},\pm\alpha\sqrt{n},\pm\sqrt{n}/\alpha\}$$

et de $[-R,R]$ est finie.

b) Si β est un nombre réel non nul et f un élément de $\mathcal{S}$, la transformée de FOURIER de $M_\beta(f)$ est $1/\beta M_{1/\beta}(f)$. Il en résulte que la transformée de FOURIER de $\tau_\alpha(f)$ est

$$(\alpha^2+\frac{1}{\alpha})\widehat{\sigma}(f)-\alpha\widehat{\sigma}(M_\alpha(f)-\widehat{\sigma}(M_{1/\alpha}(f))=-i\tau_\alpha(f).$$

19. a) Il suffit de poser $\chi(n)=-\frac{1}{2}$ si n n'est pas divisible par 4, 4 si n est divisible par 4 mais pas par 16, 0 si n est divisible par 16.

b) Le support de $\tau_{1/2}$ est l'ensemble des nombres réels de la forme $\pm\frac{\sqrt{n}}{2}$ où n parcourt l'ensemble des entiers naturels qui ne sont ni divisibles par 16, ni congrus à 7 modulo 8, ni congrus à 28 modulo 32.

Chapitre 3

Épreuves orales

Note préliminaire Les connaissances mathématiques sont tout particulièrement évaluées dans les épreuves dite « de mathématiques » et « de modélisation ». La première consiste à construire une leçon sur un thème donné. Le candidat doit proposer un plan argumenté précisant l'agencement et l'enchaînement des concepts clefs de la notion abordée, les illustrer par des exemples et applications et être en mesure de développer au tableau des résutats représentatifs de cette leçon. Dans la seconde épreuve, le candidat doit mettre en valeur ses connaissances techniques à partir d'un texte d'environ six pages qui lui est fourni. Il s'agit alors de mettre des mathématiques en action dans un contexte applicatif. Le candidat est invité à présenter et discuter, de manière structurée, les hypothèses qui conduisent à la description mathématique proposée dans le texte et à expliquer comment les énoncés du programme s'appliquent dans le contexte qui y est décrit. Le propos doit, de plus, être illustré en exploitant l'outil informatique.

3.1 Épreuve orale de mathématiques (Analyse-Probabilités & Algèbre et Géométrie)

Le jury rappelle que la sélection des leçons proposées est tirée de celles du concours standard mais il attire l'attention des candidats sur le fait que les tirages peuvent combiner deux leçons orientées analyse et probabilités ou deux leçons orientées algèbre et géométrie ou deux leçons prises dans chacun de ces domaines. Le candidat choisit laquelle de ces deux leçons il va exposer au jury. Le jury recommande une lecture minutieuse du rapport du concours standard, qui donne des indications détaillées sur les attendus de ces leçons. On y trouvera notamment une description des notions de base qui devraient constituer le cœur des leçons. Il est toujours conseillé aux candidats de chercher à rassurer le jury quant à la maîtrise de ces bases plutôt que de tenter de l'éblouir par un exposé peut-être inspiré des thèmes de recherche des candidats mais débordant largement du programme. Compte tenu des faiblesses observées dans cette partie de l'épreuve, le jury rappelle que le développement consiste à présenter dans un temps limité, sans recours à des notes, une démonstration précise et détaillée d'un résultat substantiel sélectionné dans le plan proposé. Il s'agit d'un exercice difficile qui ne s'improvise pas et auquel les candidats doivent impérativement s'entraîner.

3.2 Épreuve orale de modélisation (options A, B, C et D)

Pour cette épreuve, le jury renvoie là encore aux recommandations faites dans le rapport du concours standard. Pour le concours docteurs, le défaut de préparation s'est manifesté :

— par des hors sujets fréquents et des tentatives de présenter des leçons plutôt que de chercher à commenter le texte foruni au candidat ;

— une très grande faiblesse de la partie illustration informatique, généralement en deçà du niveau moyen observé au concours standard.

De manière surprenante, les candidats docteurs qui se sont montrés plutôt à l'aise dans l'exercice de présentation d'un plan de leçon, ont eu beaucoup plus de mal à tirer parti de leur recul scientifique pour aborder les textes de modélisation. Il est probable là encore qu'ils aient été désarçonnés par la difficulté de l'épreuve, faute peut-être d'avoir pris la peine de se confronter à suffisamment de textes rendus publics par le jury.

3.3 Épreuve orale de mise en perspective didactique d'un dossier recherche

Les dossiers fournis par les candidats étaient de qualité, tant sur le fond que la forme, très variable. Il apparaît nettement que les dossiers les plus soignés coïncident avec les prestations orales les plus convaincantes, indiquant une préparation appliquée et réfléchie. Le jury conseille aux candidats de penser dans un même élan le document écrit et la présentation orale, de ne pas se contenter de relire le dossier lors de l'oral, mais de le rendre vivant et dynamique. Le jury fait observer que la description d'une démarche de recherche et son explication didactique peuvent s'appuyer sur des sujets différents de ceux abordés durant la thèse, si le candidat juge un tel choix plus pertinent. Davantage que les travaux proprement dits du candidat, c'est son expérience de recherche, son parcours qu'il convient de valoriser dans cette épreuve. Certains candidats ont ainsi pu faire preuve d'une véritable plus-value, les distinguant des candidats du concours standard.

L'arrêté du 28 juin 2016 stipule que le candidat doit, lors de cette épreuve, répondre « [...] à une question [...] communiquée par le jury au début de l'heure de préparation ». Chacun des candidats admissibles s'est vu proposer l'une des questions suivantes :

— *Illustrer la démarche de recherche avec des notions de mathématiques de niveau L1, L2.*
— *Proposer un thème en lien avec les mathématiques pouvant être développé à un moment d'un cours de niveau second degré ou L1, L2 sous une forme magistrale ou comme une activité pratique (exercice, vulgarisation, projet, etc.).*
— *Expliquer vos travaux de recherche à une classe de mathématiques en en tirant une motivation pédagogique.*

De manière générale, les réponses à ces questions ont été plutôt pauvres, montrant une faible réflexion sur la démarche enseignante. Le jury souligne le caractère totalement ouvert de ces questions pour lesquelles il n'y a pas de réponse « type » attendue.

Les questions abordées durant la phase de dialogue avec le jury étaient très variées, portant sur des points techniques soulevés par l'exposé, sur la démarche de recherche à un niveau plus élémentaire ou sur l'organisation du système éducatif et de formation.

Cette épreuve a fait ressortir trois profils de candidats différents :

— des candidats certifiés dont la thèse remonte à plusieurs années. Pour ces candidats, se replonger dans les travaux de recherche s'est souvent révélé être extrêmement délicat, y compris pour expliquer en quoi cette expérience pouvait enrichir leur travail d'enseignant. Souvent ces candidats avaient aussi du mal à se projeter au-delà des enseignements du collège et à envisager l'évolution de leurs missions en cas de promotion ;
— les candidats ayant soutenu leur thèse récemment présentaient le profil symétrique : souvent trop peu soucieux de s'adresser à un public non spécialisé, avec un exposé centré sur leurs travaux de recherche, ils mettaient peu les missions de transfert de connaissances au centre de leur argumentation ;
— quelques candidats se sont placés sur un terrain de réflexion générale, parfois profonde, mais dépourvue de contenu mathématique. Ces candidats ont souvent été désarçonnés par des questions de nature mathématique durant cette épreuve.

Une fraction des candidats a su trouver un équilibre pertinent, avec un effort pour se mettre à la portée d'un public non expert, tout en rassurant sur la maîtrise du contenu mathématique, et cette épreuve leur a permis de présenter leur parcours et leurs compétences de chercheur comme un atout. Bien évidemment, ce sont ces candidats, bien préparés à l'ensemble des épreuves, qu'on retrouve en tête du classement.

Annexe A

Liste des leçons de mathématiques pour le concours spécial 2018

104 Groupes finis. Exemples et applications.

105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

107 Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbf{C}$-espace vectoriel. Exemples.

108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

110 Structure et dualité des groupes abéliens finis. Applications.

120 Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

121 Nombres premiers. Applications.

123 Corps finis. Applications.

141 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

151 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

152 Déterminant. Exemples et applications.

153 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

156 Exponentielle de matrices. Applications.

157 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

159 Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

162 Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

171 Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

182 Applications des nombres complexes à la géométrie.

183 Utilisation des groupes en géométrie.

190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

203 Utilisation de la notion de compacité.

208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

213 Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.

215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.

219 Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications

220 Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'étude des solutions en dimension 1 et 2.

222 Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires.

226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

228 Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

233 Méthodes itératives en analyse numérique matricielle.

234 Espaces L^p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.

235 Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.

236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.

241 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

245 Fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbf{C}$. Exemples et applications.

246 Séries de Fourier. Exemples et applications.

250 Transformation de Fourier. Applications.

262 Modes de convergence d'une suite de variables aléatoires. Exemples et applications.

264 Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.