MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE, DE
L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR ET DE
LA RECHERCHE

EAE MAT 1

SESSION 2017

AGREGATION
CONCOURS EXTERNE

Section : MATHÉMATIQUES

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

Durée : 6 heures

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : ***La copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.***

Tournez la page S.V.P.

Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs et autres appareils électroniques similaires, ainsi que les documents sont interdits.

La qualité de la rédaction sera un facteur important d'appréciation des copies. On invite donc les candidats à produire des raisonnements clairs, complets et concis.

Les candidats peuvent utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes, en veillant dans ce cas à préciser la référence du résultat utilisé.

Notations.
Dans tout ce sujet, E et F désignent des espaces vectoriels de dimension finie sur un corps commutatif $\mathbf{K}$ de caractéristique nulle. On considérera donc que $\mathbf{K}$ contient le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels.

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des applications linéaires de E dans F.
On note $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ l'espace des matrices de taille $n \times m$ à coefficients dans $\mathbf{K}$ et $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ l'espace des matrices carrées de taille n.
Étant données deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de deux espaces E et F ainsi que $u \in \mathcal{L}(E, F)$, on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ la matrice de u dans ces deux bases.

Pour un espace E on note E^* son dual qui est donc l'espace $\mathcal{L}(E, \mathbf{K})$.
On identifie les éléments de $\mathbf{K}^n$ à des vecteurs colonne, ou encore à des éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. De même on identifie les éléments du dual de $\mathbf{K}^n$, qui est donc noté $(\mathbf{K}^n)^*$, à des vecteurs ligne, ou encore à des éléments de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{K})$.

On rappelle que pour $u \in \mathcal{L}(E, F)$, l'endomorphisme ${}^tu \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ est défini par ${}^tu(f) = f \circ u$ pour tout $f \in F^*$.

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ on note $\mathrm{Tr}(A)$ sa trace, et de même pour $u \in \mathcal{L}(E)$ on note $\mathrm{Tr}(u)$ sa trace.

Commentaires
Le sujet traite de diverses questions autour de la réduction des endomorphismes. Dans la partie **I** on fait redémontrer un théorème de réduction de Jordan. Dans la partie **II** on prouve le théorème du bicommutant. Dans la partie **III** on s'intéresse à la décomposition de Dunford d'un point de vue algorithmique, inspirée de la méthode d'Euler. La partie **IV** est consacrée à la théorie des répliques de Chevalley.

Une partie préliminaire indépendante du reste du sujet, et pour laquelle on pourra adopter un mode de rédaction concis, est consacrée à la résolution de trois exercices. On encourage les candidats à y prêter une attention particulière.

Exercices préliminaires.

Matrices de rang 1

Vérifier qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ est de rang 1 si et seulement s'il existe deux vecteurs non nuls $X \in \mathbf{K}^n$ et $Y \in (\mathbf{K}^m)^*$ tels que $A = XY$.
Cette écriture est-elle unique ?

Dual de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$

Pour un élément A de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K})$ on note f_A l'application de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ dans $\mathbf{K}$ qui à une matrice M associe $f_A(M) = \mathrm{Tr}(AM)$.
Montrer que l'application qui à A associe f_A définit un isomorphisme entre $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K})$ et $(\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K}))^*$.

Matrices associées à une application linéaire donnée.

Soit u une application linéaire d'un espace E de dimension m dans un espace F de dimension n, et A un élément de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$.
À quelle condition existe-t-il une base $\mathcal{B}$ de E et une base $\mathcal{C}$ de F telles que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = A$?

I Réduction de Jordan

Dans toute la suite, E est un espace vectoriel de dimension strictement positive. Pour u endomorphisme de E, on note I_u l'idéal des polynômes de $\mathbf{K}[X]$ qui annulent u, et π_u un générateur unitaire de cet idéal qu'on rappelle être un polynôme minimal de u. On introduit de même π_M pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

1. Vérifier l'égalité $\dim_{\mathbf{K}}(\mathbf{K}[u]) = \deg(\pi_u)$.
2. Montrer que si u est nilpotent alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*, \mathrm{Tr}(u^p) = 0$.
3. On suppose que pour tout $p \in \mathbb{N}^*, \mathrm{Tr}(u^p) = 0$. On écrit $\pi_u = X^k Q(X)$ avec $\mathrm{PGCD}(X, Q) = 1$. On pose $F = \mathrm{Ker}(u^k)$ et $G = \mathrm{Ker}(Q(u))$. On va montrer par l'absurde que $G = \{0\}$.
   (a) Montrer que $E = F \oplus G$ et que cette décomposition est une décomposition en sous-espaces stables par u.
   (b) On suppose G non réduit à $\{0\}$ et on note u_G l'endomorphisme de G induit par u. Montrer que $Q(u_G) = 0$ et en déduire qu'il existe $i > 0$ tel que les traces de u_G^i et u^i soient non nulles.
   (c) Conclure.
   [*Indication : on pourra étudier la matrice de u dans une base adaptée à la décomposition proposée.*]

Si $\dim(E) = n$, on rappelle les définitions suivantes ; $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit *cyclique* s'il existe $x_0 \in E$ tel que $\mathcal{B} = (x_0, u(x_0), ..., u^{n-1}(x_0))$ soit une base de E. Un sous-espace F non nul de E, stable par u, est dit u-cyclique (ou tout simplement cyclique s'il n'y a pas d'ambiguité) si $u_{|F}$ est cyclique.

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ on définit $\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \ / \ uv = vu\}$, c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec u. Cet ensemble $\mathcal{C}(u)$ est appelé le *commutant de u*.

4. On va montrer que si un endomorphisme u de E est cyclique, alors $\mathbf{K}[u] = \mathcal{C}(u)$.
   On se donne donc u cyclique, $x_0 \in E$ tel que $(x_0, ..., u^{n-1}(x_0))$ soit une base de E et un endomorphisme v vérifiant $uv = vu$.
   (a) Vérifier qu'il existe un polynôme P tel que $v(x_0) = P(u)(x_0)$.
   (b) En déduire l'égalité $v = P(u)$, puis conclure.
5. On suppose l'endomorphisme u diagonalisable. À quelle(s) condition(s) sur ses valeurs propres u est-il cyclique ?
6. On se donne $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice 2 avec $\dim(E) = 4$. On pose $C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} C_2 & O \\ O & O \end{pmatrix}$ ou $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} C_2 & O \\ O & C_2 \end{pmatrix}$.
7. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. On va établir un théorème de réduction de Jordan, énoncé ci-dessous, par récurrence sur $n = \dim(E)$:

   Si u est un endomorphisme nilpotent, alors il existe des sous-espaces $F_1, ..., F_k$ tels que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_k$ et tels que les restrictions de u à chaque F_i soient cycliques.

   Le cas $n = 1$ est évident et on ne demande pas de le rédiger. Pour le passage des rangs $1, .., n-1$ au rang n, on va appliquer l'hypothèse de récurrence à $u_{|\mathrm{Im}(u)}$.
   On écrit donc $\mathrm{Im}(u) = \bigoplus\limits_{k=1}^{p} F_k$ où les sous-espaces F_k sont supposés cycliques. On choisit alors y_k tel que $F_k = \mathbf{K}[u](y_k)$ et on écrit $y_k = u(x_k)$ avec $x_k \in E$.

   Posons $G = \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u)$, on note H un supplémentaire de G dans $\mathrm{Ker}(u)$.

(a) Montrer que les sous-espaces cycliques de H sont les sous-espaces de dimension 1.

(b) Montrer que $E = \overset{p}{\underset{k=1}{\oplus}} \mathbf{K}[u](x_k) \oplus H$.

(c) Conclure.

II Bicommutant

Dans cette partie on se donne un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ on a défini $\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \ / \ uv = vu\}$, et pour une partie $U \subset \mathcal{L}(E)$ on note $\mathcal{C}(U) = \{v \in \mathcal{L}(E) \ / \ \forall u \in U, \ uv = vu\}$.

On abrège $\mathcal{C}(\mathcal{C}(u))$ en $\mathcal{CC}(u)$, voire $\mathcal{CC}_{\mathbf{K}}(u)$ si on veut faire référence au corps $\mathbf{K}$, qu'on appelle le *bicommutant* de u. De même on définit $\mathcal{C}(M)$ et $\mathcal{CC}(M)$ ou $\mathcal{CC}_{\mathbf{K}}(M)$ pour une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Le but de cette partie est de démontrer le théorème du bicommutant qui affirme : pour $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{CC}_{\mathbf{K}}(u) = \mathbf{K}[u]$, ou, de façon équivalente, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $\mathcal{CC}_{\mathbf{K}}(M) = \mathbf{K}[M]$.

1. Montrer que si u et v sont des endomorphismes semblables de E, alors $\dim(\mathcal{CC}(u)) = \dim(\mathcal{CC}(v))$.
2. Vérifier que, pour établir le théorème du bicommutant, il suffit de montrer que pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, $\dim(\mathcal{CC}(u)) = \deg(\pi_u)$.
3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $\mathbf{L}$ un surcorps de $\mathbf{K}$. Montrer l'indépendance du rang par rapport au corps, à savoir que le rang de M est le même quand on fait opérer M sur $\mathbf{K}^n$ ou sur $\mathbf{L}^n$.
4. Montrer que si $\mathbf{L}$ est un surcorps de $\mathbf{K}$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, alors les polynômes minimaux de M considérée comme opérant sur $\mathbf{K}^n$ et sur $\mathbf{L}^n$ sont les mêmes.
5. Montrer que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $\mathbf{L}$ surcorps de $\mathbf{K}$, alors $\dim_{\mathbf{K}}(\mathcal{CC}_{\mathbf{K}}(M)) = \dim_{\mathbf{L}}(\mathcal{CC}_{\mathbf{L}}(M))$.

En considérant un corps de décomposition de π_M, on peut supposer π_M scindé sur le corps sur lequel on travaille pour établir le théorème du bicommutant ; c'est ce que l'on supposera dans la suite de cette partie.

6. On suppose dans cette question $M = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$, avec A et B des matrices carrées. On suppose que les polynômes π_A et π_B sont premiers entre eux et scindés. On suppose ici que le théorème du bicommutant est vrai pour les matrices A et B.
   (a) Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est dans le commutant de M.
   (b) Déterminer le commutant de $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (c) En déduire que le bicommutant de M est l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} P(A) & O \\ O & Q(B) \end{pmatrix}$ avec P et Q éléments de $\mathbf{K}[X]$.
   (d) Conclure que le théorème du bicommutant est aussi vrai pour M.
7. On suppose dans cette question que $u = \lambda \mathrm{Id}_E + n$, avec n nilpotent.
   (a) Vérifier que $\mathcal{C}(u) = \mathcal{C}(n)$ et $\mathcal{CC}(u) = \mathcal{CC}(n)$.
   (b) Comme n est nilpotent, on sait par la réduction de Jordan [Partie **I**], qu'on peut écrire $E = \overset{p}{\underset{i=1}{\oplus}} E_i$, avec les E_i des sous-espaces cycliques.
   On choisit alors $x_i \in E_i$ et $d_i \in \mathbb{N}^*$ tels que $\mathcal{B}_i = (x_i, \ n(x_i), \ \ldots, \ n^{d_i - 1}(x_i))$ est une base de E_i et $d_1 \leq \ldots \leq d_p$. On note $\mathcal{B} = \overset{p}{\underset{i=1}{\cup}} \mathcal{B}_i$ la base de E ainsi formée.
   Montrer qu'on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(n) = \begin{pmatrix} C_{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & C_{d_p} \end{pmatrix}$, où on a noté C_d la matrice compagnon de taille d,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Montrer que le théorème du bicommutant est vrai pour l'endomorphisme n.

[*Indication : On pourra définir judicieusement des applications p_i nulles sur les E_j pour $j \neq i$ et telles que $p_i(x_i) = x_i$, puis des applications q_i nulles sur les E_j si $j \neq p$ et telle que $q_i(x_p) = x_i$*].

8. Démontrer le théorème du bicommutant pour une matrice quelconque $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

III Décomposition de Dunford pour une matrice

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est dite *semi-simple* si elle est diagonalisable sur une extension convenable de $\mathbf{K}$. On va montrer dans cette partie, que M s'écrit de manière unique $M = D + N$ avec $D \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ semi-simple, $N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ nilpotente et $DN = ND$. Ce sont les composantes semi-simple et nilpotente de M.

1. Montrer que M est semi-simple si et seulement si son polynôme minimal est à facteurs simples sur $\mathbf{K}$.

On fixe jusqu'à la fin de cette partie une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On note π_A son polynôme minimal. On écrit $\pi_A = P_1^{\alpha_1}...P_k^{\alpha_k}$ la décomposition de π_A en facteurs irréductibles. On note $P = P_1...P_k$ le produit des irréductibles distincts divisant π_A.

2. Quel est le lien entre P et le polynôme caractéristique χ_A de A ?
3. Justifier qu'il existe deux polynômes R et S de $\mathbf{K}[X]$ tels que $RP + SP' = 1$.
4. Montrer qu'il existe Q dans $\mathbf{K}[X, Y]$ vérifiant $P(X + Y) = P(X) + YP'(X) + Y^2Q(X, Y)$.

On définit par récurrence la suite de matrices $(A_k)_{k\geq 0}$, par $A_0 = A$ et pour tout entier k,

$$A_{k+1} = A_k - P(A_k)S(A_k).$$

5. Montrer que pour tout entier k, $P(A_k)$ appartient à $P(A)^{2^k}\mathbf{K}[A]$, et trouver un entier ℓ tel que $P(A_\ell) = 0$.
6. Montrer que pour un tel entier $A = A_\ell + (A - A_\ell)$ est l'unique décomposition de A en somme d'une matrice semi-simple et d'une matrice nilpotente qui commutent.

IV Théorie des répliques de Chevalley

Dans toute cette partie, on considère l'algèbre des matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Pour $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ on définit le commutateur par $[M, N] = MN - NM$ et on note $\mathrm{ad}_M : N \mapsto [M, N]$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ correspondant. On définit de même le commutateur de deux éléments de $\mathcal{L}(E)$.

Pour $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ on définit $A \otimes B$ comme étant la matrice par blocs

$$(a_{i,j}B)_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq m} \in \mathcal{M}_{np,mq}(\mathbf{K}),$$

et $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K}) \otimes \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ comme l'espace vectoriel engendré par les matrices $A \otimes B$ ainsi définies.

On admet l'associativité et la bilinéarité de l'opérateur $\otimes$ ainsi défini.

1. (a) Montrer que $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K}) \otimes \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K}) = \mathcal{M}_{np,mq}(\mathbf{K})$.
   (b) Établir que la famille $e_{i,j} \otimes f_{k,l}$ indexée par $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, $1 \leq k \leq p$, $1 \leq l \leq q$, est une base de $\mathcal{M}_{np,mq}(\mathbf{K})$ si $(e_{i,j})_{i,j}$ et $(f_{k,l})_{k,l}$ sont des bases de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ et $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ respectivement.
   (c) Si $E = \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ et $F = \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$, expliciter un isomorphisme entre $(E \otimes F)^*$ et $E^* \otimes F^*$.

2. (a) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $B \in \mathcal{M}_m(\mathbf{K})$, calculer $\mathrm{Tr}(A \otimes B)$.
   (b) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $B \in \mathcal{M}_m(\mathbf{K})$, calculer $\det(A \otimes B)$.

Définition de $\mathcal{N}_{r,s}$ et action de $A_{r,s}$

Pour tous entiers positifs r, s, on définit $\mathcal{N}_{r,s}(\mathbf{K}^n)$ (noté simplement $\mathcal{N}_{r,s}$ s'il n'y a pas de confusion possible) l'espace vectoriel engendré par les vecteurs de la forme

$$X_1 \otimes \cdots \otimes X_r \otimes Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_s$$

où $(X_i)_{1 \leq i \leq r}$ est une famille d'éléments de $\mathbf{K}^n$ et $(Y_j)_{1 \leq j \leq s}$ une famille d'éléments de $(\mathbf{K}^n)^*$. On convient que $\mathcal{N}_{0,0} = \{0\}$.

On a donc $\mathcal{N}_{r,s} = (\mathbf{K}^n)^{\otimes r} \otimes ((\mathbf{K}^n)^*)^{\otimes s}$. Les vecteurs de $\mathcal{N}_{r,s}$ sont appelés des *tenseurs*.

Par exemple $\mathcal{N}_{1,0} = \mathbf{K}^n$ et $\mathcal{N}_{0,1} = (\mathbf{K}^n)^*$.

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et r, s des entiers positifs, on définit $A_{r,s} \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_{r,s})$ par :

$$A_{r,s} \cdot n = \sum_{i=1}^{r} X_1 \otimes \cdots \otimes AX_i \otimes \cdots \otimes X_r \otimes Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_s - \sum_{j=1}^{s} X_1 \otimes \cdots \otimes X_r \otimes Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_j A \otimes \cdots \otimes Y_s,$$

pour $n = X_1 \otimes \cdots \otimes X_r \otimes Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_s$.

Ainsi pour $X \in \mathbf{K}^n$ et $Y \in (\mathbf{K}^n)^*$, on a $A_{1,0} \cdot X = AX$ et $A_{0,1} \cdot Y = -YA$.

3. Vérifier que $\mathcal{N}_{1,1} = \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, puis que l'action de $A_{1,1}$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est donnée par $A_{1,1} \cdot M = \mathrm{ad}_A(M)$ pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
4. Vérifier que $\mathcal{N}_{s,r}$ est canoniquement isomorphe au dual $\mathcal{N}_{r,s}^*$.
5. Soit P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, montrer que l'endomorphisme $\phi_{P,r,s}$ de $\mathcal{N}_{r,s}$ défini par

   $$\phi_{P,r,s}(n) = PX_1 \otimes \cdots \otimes PX_r \otimes Y_1 P^{-1} \otimes \cdots \otimes Y_r P^{-1}$$

   pour $n = X_1 \otimes \cdots \otimes X_r \otimes Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_s$, est un isomorphisme.
6. On suppose A et B deux matrices semblables, vérifier que $A_{r,s}$ et $B_{r,s}$ le sont aussi.

On admet dans la suite que $(\mathcal{N}_{r,s})_{r',s'}$ est canoniquement isomorphe à $\mathcal{N}_{rr'+ss',rs'+sr'}$ et $(A_{r,s})_{r',s'} = A_{rr'+ss',rs'+sr'}$.

Définition des répliques.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on dit qu'une matrice $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est une *réplique* de A si : $\forall r, s \geq 0$, $\forall n \in \mathcal{N}_{r,s}$

$$A_{r,s} \cdot n = 0 \Rightarrow A'_{r,s} \cdot n = 0.$$

En d'autres termes, tout tenseur annulé par A est aussi annulé par A'.

7. Établir que :
   (a) Si A est diagonalisable alors pour tous $r, s \geq 0$, $A_{r,s}$ est diagonalisable avec pour valeurs propres la famille

   $$\sum_{p=1}^{r} \lambda_{i_p} - \sum_{q=1}^{s} \lambda_{j_q},$$

   où $1 \leq i_1, ..., i_r \leq n$ et $1 \leq j_1, ..., j_s \leq n$ et $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ les valeurs propres de A.

   (b) Si A nilpotente alors pour tous $r, s \geq 0$, $A_{r,s}$ nilpotente.
8. Vérifier que :
   (a) Si A'' est une réplique de A' et si A' est une réplique de A alors A'' est une réplique de A.
   (b) Si A' est une réplique de A alors pour tous $r, s \geq 0$, $A'_{r,s}$ est une réplique de $A_{r,s}$.

On admettra que si A, B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ alors pour tous $r, s \geq 0$, $[A, B]_{r,s} = [A_{r,s}, B_{r,s}]$.

9. (a) Montrer que si A' est une réplique de A alors A' est un polynôme sans terme constant en A.

   [*Indication : on pourra introduire* $A_{1,1}$ *et utiliser le théorème du bicommutant, puis discuter le cas* A *inversible ou non.*]

   (b) Montrer que A' est une réplique de A si et seulement si pour tous $r, s \geq 0$, $A'_{r,s}$ est un polynôme sans terme constant en $A_{r,s}$.

10. Soient D et N les composantes semi-simple et nilpotente de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

    (a) Montrer qu'alors pour tous $r, s \geq 0$, $D_{r,s}$ et $N_{r,s}$ sont les composantes semi-simple et nilpotente de $A_{r,s}$.

    (b) Vérifier que D et N sont des répliques de A.

Dans les quatre questions suivantes, on va déterminer la nature précise des répliques d'une matrice A.

11. On suppose que A est diagonalisable et on se donne $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.
    On note $\mathbb{Q}\langle\lambda_i\rangle$ le sous-$\mathbb{Q}$-espace vectoriel de $\mathbf{K}$ engendré par les $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
    Montrer que B est une réplique de A si et seulement s'il existe une application $\mathbb{Q}$-linéaire

$$\varphi : \mathbb{Q}\langle\lambda_i\rangle \mapsto \mathbf{K},$$

    telle que $B = P\Delta P^{-1}$ avec $\Delta = \mathrm{Diag}(\varphi(\lambda_1), .., \varphi(\lambda_n))$.

12. On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est matrice compagnon nilpotente cyclique. Soit B une réplique de A. On veut montrer, par récurrence, que $B = \lambda A$ pour un $\lambda \in \mathbf{K}$.

    (a) Traiter les cas $n = 1$ puis $n = 2$.

    (b) On suppose donc le résultat établi au rang $n - 1$. Montrer qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$ tel que

$$B - \lambda A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \mu & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

    les coefficients non marqués étant nuls.

    [*Indication : on pourra étudier les matrices* A' *et* B' *des endomorphismes de* $\langle e_2, \ldots, e_n\rangle$ *induit par* A *et* B, *et montrer que* B' *est une réplique de* A']

    (c) En considérant $A_{2,0}$ montrer que $\mu = 0$ et conclure.

13. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice nilpotente. Montrer que les répliques de A sont les λA avec $\lambda \in \mathbf{K}$.

14. Soit maintenant A une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On note $A = D + N$ sa décomposition en composantes semi-simple et nilpotente.

    (a) Soit B une réplique de A et $B = \Delta + M$ sa décomposition en composantes semi-simple et nilpotente. Montrer que Δ est un polynôme en D puis que Δ est une réplique de D.

    (b) Montrer de même que M est une réplique de N.

    (c) Conclure sur la nature des répliques de A.

15. Établir que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est nilpotente si et seulement si pour toute réplique A' de A on a $\mathrm{Tr}(AA') = 0$.

Tournez la page S.V.P.

INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie.

Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EAE	1300A	101	0376

IMPRIMERIE NATIONALE – 17 0079 – D'après documents fournis