3.2 Corrigé de l'épreuve écrite de mathématiques générales

Exercices préliminaires.

Exercice 1 – Matrices de rang 1 Le rang d'une matrice A est la dimension de l'espace vectoriel engendré par ses colonnes. Soit A une matrice de rang 1,et X une colonne non nulle de A. La j-ième colonne A_j de A est donc proportionnelle à X. Notons $A_j = y_j X$ pour $j \in \{1, \ldots, n\}$. Posons $Y = (y_1 \cdots y_n)$. La matrice Y est non nulle car $A = XY$. Réciproquement les colonnes d'une telle matrice sont proportionnelles à la matrice colonne non nulle X, donc si Y est non nulle, la matrice est de rang 1. Cette écriture n'est pas unique, elle dépend du choix du générateur de la droite vectorielle engendrée par X. Les générateurs sont les $X' = \alpha X$, $\alpha \neq 0$, d'où si $Y' = \frac{1}{\alpha}Y$, $A = X'Y'$.

Exercice 2 – Dual de $M_{n,m}(K)$ L'application f_A est bien une forme linéaire de $M_{n,m}(K)$ comme composition de la multiplication par A, linéaire de $M_{n,m}(K)$, dans $M_m(K)$, et de la trace qui est une forme linéaire de $M_m(K)$. La vérification de la linéarité de l'application qui à A associe f_A provient aussi de la linéarité de la trace, en effet

$$\forall(\lambda, A, B, M) \in K \times M_{m,n}(K)^2 \times M_{n,m}(K),$$
$$Tr((\lambda A + B)M) = \lambda Tr(AM) + Tr(BM)$$

D'où

$$\forall(\lambda, A, B, M) \in K \times M_{m,n}(K)^2 \times M_{n,m}(K), f_{\lambda A+B} = f_{\lambda A} + f_B.$$

De plus si $A = (a_{i,j})$,

$$\forall A \in M_{n,m}(K), \forall(i,j) \in \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}, \quad f_A(E_{i,j}) = a_{j\,i},$$

donc la forme linéaire f_A est nulle si et seulement si A est nulle.
On obtient donc une application linéaire injective entre espaces vectoriels de même dimension mn, c'est un isomorphisme.

Exercice 3 – Matrices associée à une application linéaire donnée Soit u une application linéaire de E dans F et A un élément de $M_{n,m}(K)$ et $M = Mat_{\mathcal{B}_1,\mathcal{C}_1}(u)$ la matrice de u relative aux bases $(\mathcal{B}_1, \mathcal{C}_1)$. Dire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E et une base $\mathcal{C}$ de F telles que $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = A$, signifie que si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}$ et Q celle de $\mathcal{C}_1$ à $\mathcal{C}$, alors par changement de base $A = Q^{-1}MP$. Cette relation matricielle caractérise le fait que A et M ont le même rang. On obtient donc que u admet la matrice A dans les bases $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ si et seulement si le rang de u est égal au rang de la matrice A.

Partie I – Réduction de Jordan

1. L'homomorphisme d'évaluation de $K[X]$ dans $K[u]$ qui à P associe $P(u)$ est surjectif et donne par passage au quotient, un isomorphisme d'anneaux (donc aussi d'espaces vectoriels sur K) entre $K[X]/\pi_u$ et $K[u]$. En particulier l'anneau $K[u]$ est commutatif. Par division euclidienne par π_u tout polynôme en u s'écrit de façon unique sous la forme $R(u)$ où R est un polynôme de degré strictement inférieur à $\deg(\pi_u)$. Donc $\dim_K(K[u]) = \deg \pi_u$.
2. Supposons u nilpotent, alors le polynôme minimal de u est de la forme X^k avec $1 \leqslant k \leqslant \dim E$. En particulier le polynôme minimal est scindé et admet une seule racine multiple 0. Le polynôme caractéristique de u est donc X^n où n désigne la dimension de E, et par identification des coefficients de ce polynôme, $Tr(u) = 0$. De plus, pour tout p dans $\mathbf{N}^*$, $(u^p)^k = 0$ donc u^p est nilpotent puis $Tr(u^p) = 0$.

3. On suppose que pour tout p dans $\mathbf{N}^*$, $Tr(u^p) = 0$.
   (a) Si $\pi_u = X^k Q(X)$ avec $pgcd(X, Q) = 1$ alors X^k et Q sont premiers entre eux, et le lemme des noyaux donne
   $$\ker \pi_u(u) = \ker(u^k) \oplus \ker Q(u).$$
   D'où la décomposition $E = F \oplus G$.
   Si P est un polynôme, l'endomorphisme $P(u)$ vérifie $P(u) \circ u = u \circ P(u)$. Pour un élément x de E vérifiant $P(u)(x) = O_E$, alors $u(P(u)(x)) = O_E$ puis $P(u)(u(x)) = O_E$. Le noyau $\ker P(u)$ est donc stable par u. Les sous-espaces F et G sont donc stables par u.
   (b) On suppose G non réduit à $\{0_E\}$, l'endomorphisme u_G de G induit par u est défini par :
   $$u_G : G \to G, \, \forall x \in G, \, u_G(x) = u(x).$$
   On en déduit
   $$\forall x \in G, \, Q(u_G)(x) = Q(u)(x),$$
   d'où $Q(u_G) = Q(u)_G$ et $Q(u_G) = O_{End(G)}$.
   Si $Q = X^\ell + a_{\ell-1} X^{\ell-1} + \cdots + a_0$, on obtient
   $$u_G^\ell + \cdots + a_0 Id_G = 0.$$
   En prenant la trace, il vient :
   $$Tr(u_G^\ell) + \cdots + a_0 \dim G = 0,$$
   or en caractéristique 0, a_0 et $\dim G$ étant non nuls, $a_0 \dim G$ est non nul. Il existe donc un entier $0 < j \leqslant \ell$ tel que $Tr(u_G^j) \neq 0$. Comme E est la somme directe des deux sous-espaces stables F et G, si $x = x_F + x_G$ est la décomposition d'un élément x de E comme somme d'un élément de F et de G, on a $u(x) = u_F(x_F) + u_G(x_G)$. La réunion d'une base de F et d'une base de G permet d'écrire la matrice de u sous forme diagonale par blocs, les blocs diagonaux correspondants à u_F et u_G.
   On a donc $Tr(u^j) = Tr(u_F^j) + Tr(u_G^j)$. Par définition de F, u_F est nilpotente donc $Tr(u_F^j) = 0$, puis $Tr(u^j) \neq 0$.
   (c) On obtient donc une contradiction avec l'hypothèse de départ sur u. L'espace G est réduit à $\{0_E\}$ et $u^k = 0$. L'endomorphisme u est donc nilpotent.
4. Soit u un endomorphisme de E, on suppose u cyclique. Soit $x_0, \cdots, u^{n-1}(x_0)$ une base de E et v un endomorphisme vérifiant $uv = vu$.
   (a) Puisque u est cyclique $v(x_0)$ s'écrit dans la base précédente. Il existe donc un polynôme P de degré inférieur ou égal à $n-1$ tel que $v(x_0) = P(u)(x_0)$.
   (b) Pour tout ℓ dans $\{0, \cdots, n-1\}$
   $$\begin{aligned} v(u^\ell(x_0)) &= u^\ell(v(x_0)) \\ &= u^\ell(P(u)(x_0)) \\ &= P(u)(u^\ell(x_0)) \end{aligned}$$
   Donc v et $P(u)$ sont des applications linéaires qui coïncident sur la base $(x_0, \cdots, u^{n-1}(x_0))$, d'où $v = P(u)$. Le commutant de u qui contient naturellement $K[u]$ est aussi contenu dans ce dernier, donc lui est égal.

5. On suppose l'endomorphisme u diagonalisable. Alors le polynôme minimal de u est scindé à racine simple. Si u est cyclique le polynôme minimal de u est de degré supérieur ou égal à la dimension de E, et comme il divise le polynôme caractéristique (Cayley-Hamilton) de degré $\dim E$, et que ces deux polynômes sont unitaires, il est lui est égal. Donc χ_u est scindé à racines simples.
   Réciproquement supposons χ_u scindé à racines simples, alors $\chi_u = \pi_u$. Soient $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base de vecteurs propres pour u et $x_0 = \sum_{i=1}^{n} e_i$, alors la matrice des coordonnées des vecteurs $(x_0, \cdots, u^{n-1}(x_0))$ dans cette base est la matrice de Vandermonde $A = (\lambda_i^{j-1})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ de déterminant non nul, donc la famille $(x_0, \cdots u^{n-1}(x_0))$ est une base de E.
   On a donc montré que l'endomorphisme u est cyclique.
6. Soit u un endomorphisme nilpotent d'indice 2, d'un espace vectoriel E de dimension 4. D'après le théorème du rang $\dim\ker u + \dim u(E) = \dim E$. De plus $u^2 = 0$ donc $u(E) \subset \ker(u)$. D'où $\dim u(E) \leqslant \dim\ker(u)$. Comme $\dim u(E) \geqslant 1$, les seules possibilités sont $(\dim u(E), \dim\ker u) \in \{(1,3),(2,2)\}$.
   - Dans le premier cas soit e_1 tel que $u(e_1) \neq O_E$, on pose $e_2 = u(e_1)$ c'est un élément non nul de $\ker u$. D'après le théorème de la base incomplète il existe e_3 et e_4 dans $\ker u$ tels que (e_2, e_3, e_4) soit une base de $\ker u$. Comme e_1 n'appartient pas au noyau de u, (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de E et la matrice de u dans cette base est $\begin{pmatrix} C_2 & O \\ O & O \end{pmatrix}$.
   - Dans le second cas on a $\dim u(E) = 2$, et il existe e_1 et e_3 tels que $(e_2, e_4) = (u(e_1), u(e_3))$ soit une base de $u(E)$. Alors on vérifie que (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de E. En effet on a

$$\begin{aligned} ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4 = O_E &\Rightarrow au(e_1) + cu(e_3) = O_E \\ &\Rightarrow (a,c) = (0,0) \end{aligned}$$

   puis L' indépendance de e_2 et e_4 donne $(b,d) = (0,0)$. La matrice de u dans cette base est $\begin{pmatrix} C_2 & O \\ O & C_2 \end{pmatrix}$.
7. (a) Le sous-espace H étant contenu dans le noyau de u, pour tout vecteur non nul x de H le sous-espace cyclique engendré par x est $\mathbf{K}\cdot x$ donc de dimension 1. Réciproquement un sous-espace cyclique non nul de H est engendré par un vecteur non nul, dont les itérés sont nuls, donc est de dimension 1.
   (b) On a immédiatement $\sum_{i=1}^{p} \mathbf{K}[u](x_k) + H \subset E$.
   Pour tout x dans E, il existe des polynômes $P_1, \ldots, P_k$ tels que $u(x) = \sum_{k=1}^{p} P_k(u)(y_k)$. D'où $x - \sum_{k=1}^{p} P_k(u)(x_k) \in \ker u$. Or $\ker u = (u(E) \cap \ker u) \oplus H$, d'où l'existence de polynômes Q_k, et d'un élément y de H, tels que

$$x = \sum_{k=1}^{p} (P_k + XQ_k)(u)(x_k) + y.$$

   On a donc démontré l'égalité $E = \sum_{i=1}^{p} \mathbf{K}[u](x_k) + H$.
   Pour montrer que la somme est directe il reste à démontrer l'unicité de la décomposition d'un élément, ce qui se ramène, par linéarité, à l'unicité de la décomposition du vecteur nul. Soient y dans H et $P_1, \ldots, P_k$ des polynômes tels que $\sum_{k=1}^{p} P_k(u)(x_k) + y = O_E$. Alors $\sum_{k=1}^{p} P_k(u)(y_k) = O_E$, puis sachant que $u(E) = \bigoplus_{k=1}^{p} \mathbf{K}[u](y_k)$.

$$\forall 1 \leqslant k \leqslant p, P_k(u)(y_k) = O_E$$

   On en déduit que si n_k est l'indice de nilpotence de u_{F_k} alors X^{n_k} divise P_k. Donc

$$\forall 1 \leqslant k \leqslant p, P_k(u)(x_k) \in u(E) \cap \ker u = G.$$

Alors $y = -\sum_{k=1}^{p} P_k(u)(x_k)$ est dans $H \cap G$. Donc $y = O_E$ et $\sum_{k=1}^{p} P_k(u)(x_k) = O_E$. Or X divise P_k donc $P_k(u)(x_k) \in \mathbf{K}[u](y_k)$. On en déduit $P_k(u)(x_k) = O_E$ et le résultat $E = \bigoplus_{k=1}^{p} \mathbf{K}[u](x_k) \oplus H$.

(c) On conclut en constatant que toute base $(x_{p+1}, \cdots, x_{p+\dim H})$ de H donne une décomposition en sous-espace cyclique de dimension 1 de cet espace. Posons $G_k = \mathbf{K}[u](x_k)$ pour $1 \leqslant k \leqslant p + \dim H$. L'espace E est somme directe des sous-espaces G_i et l'endomorphisme u_{G_i} est cyclique pour tout $1 \leqslant i \leqslant \dim H + p$.

Partie II – Bicommutant

1. Si u et v sont des endomorphismes semblables de E, il existe un isomorphisme s de E tel que $v = sus^{-1}$. Comme la conjugaison par s est un automorphisme $\mathbf{K}$-linéaire de l'anneau $\mathcal{L}(E)$, le commutant de v est $\mathcal{C}(v) = s^{-1}\mathcal{C}(u)s$ et $\mathcal{CC}(v) = s\mathcal{CC}(u)s^{-1}$. D'où
$$\dim \mathcal{CC}(v) = \dim \mathcal{CC}(u).$$
2. Tout endomorphisme de $\mathcal{C}(u)$ commute avec les éléments de $\mathbf{K}[u]$, donc $\mathcal{CC}(u)$ contient $\mathbf{K}[u]$. L'égalité entre ces deux algèbres est donc équivalente à celle de leur dimension sur $\mathbf{K}$.
3. Si $M \in M_n(\mathbf{K})$, M est de rang r si et seulement s'il existe deux matrices P, Q de $GL_n(\mathbf{K})$ telles que
$$\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = PMQ^{-1}$$
Les matrices P et Q appartiennent aussi à $GL_n(\mathbf{L})$ donc le rang de M ne dépend donc du choix du surcorps $\mathbf{L}$ de $\mathbf{K}$.
4. On considère la matrice de $M_{n^2}(\mathbf{K})$ formée des coordonnées dans la base canonique des matrices $(M^{j-1})_{1 \leqslant j \leqslant n^2}$. Le rang de cette matrice est égal à la dimension de $\mathbf{K}[u]$ c'est à dire au degré du polynôme minimal de M agissant sur $\mathbf{K}^n$. Comme la base canonique de $M_n(\mathbf{K})$ est aussi celle de $M_n(\mathbf{L})$, les polynômes minimaux respectifs ont le même degré. Le résultat vient alors du fait que le polynôme minimal de M agissant sur $\mathbf{L}^n$ divise naturellement celui de M agissant sur $\mathbf{K}^n$, et que ces deux polynômes sont unitaires.
5. Soit $\phi_{\mathbf{L},M}$ l'endomorphisme de $M_n(\mathbf{L})$ défini par $\phi_{\mathbf{L},M}(A) = AM - MA$. La matrice de $\phi_{\mathbf{L},M}$ dans la base canonique de $M_n(\mathbf{L})$ est aussi celle de $\phi_{\mathbf{K},M}$. Elle est donc dans $M_{n^2}(\mathbf{K})$ et son rang est lié à la dimension de $\mathcal{C}_{\mathbf{L}}(M)$ par le théorème du rang :
$$\dim_{\mathbf{L}} M_n(\mathbf{L}) = r(\phi_{\mathbf{L},M}) + \dim_{\mathbf{L}} \ker \phi_{\mathbf{L},M}.$$
On en déduit
$$n^2 = r(\phi_{\mathbf{L},M}) + \dim_{\mathbf{L}} \mathcal{C}_{\mathbf{L}}(M).$$
De même en raisonnant sur le corps $\mathbf{K}$,
$$n^2 = r(\phi_{\mathbf{K},M}) + \dim_{\mathbf{K}} \mathcal{C}_{\mathbf{K}}(M).$$
En utilisant la question 3) on a $r(\phi_{\mathbf{L},M}) = r(\phi_{\mathbf{K},M})$, donc $\dim_{\mathbf{L}} \mathcal{C}_{\mathbf{L}}(M) = \dim_{\mathbf{K}} \mathcal{C}_{\mathbf{K}}(M)$. Si $M_1, \ldots, M_\ell$ est une base de $\mathcal{C}_{\mathbf{K}}(M)$, la matrice des coordonnées des M_i dans la base canonique de $M_n(\mathbf{K})$ est à coefficients dans $\mathbf{K}$. Son rang sur $\mathbf{L}$ est donc le même que sur $\mathbf{K}$. On en déduit que $M_1, \ldots, M_\ell$ est une base de $\mathcal{C}_{\mathbf{L}}(M)$. Soit alors $\psi_{\mathbf{L}}$ l'application de $M_n(\mathbf{L})$ dans $\prod_{i=1}^{\ell} M_n(\mathbf{L})$ définie par $\psi_{\mathbf{L}}(A) = (AM_1 - M_1A, \cdots, AM_\ell - M_\ell A)$. C'est une application linéaire dont la matrice relative aux bases canoniques de $M_n(\mathbf{L})$ est à coefficient dans $\mathbf{K}$. En particulier $r(\psi_{\mathbf{L}}) = r(\psi_{\mathbf{K}})$, puis en utilisant le théorème du rang $\dim_{\mathbf{K}} \mathcal{CC}_{\mathbf{K}}(M) = \dim_{\mathbf{L}} \mathcal{CC}_{\mathbf{L}}(M)$.
6. On suppose que $M = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$, les polynômes π_A et π_B premiers entre eux et scindés et que A et B vérifie la conclusion du théorème du bicommutant.

(a) Les décompositions en blocs qui interviennent dans la suite sont compatibles avec celle donnée par l'énoncé, c'est à dire que le premier bloc sur la diagonal est de même taille que A. ($A \in M_p(\mathbf{K})$, $B \in M_{n-p}(\mathbf{K})$). On a

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} I & O \\ O & O \end{pmatrix} M &= \begin{pmatrix} A & O \\ O & O \end{pmatrix} \\ &= M \begin{pmatrix} I & O \\ O & O \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Donc la matrice $\begin{pmatrix} I & O \\ O & O \end{pmatrix}$ est dans le commutant de M.

(b) Un calcul élémentaire donne :

$$\mathcal{C}(\begin{pmatrix} I & O \\ O & O \end{pmatrix}) = \left\{ \begin{pmatrix} C & O \\ O & D \end{pmatrix}, C \in M_p(\mathbf{K}),\ D \in M_{n-p}(\mathbf{K}) \right\}.$$

(c) Le bicommutant de M est contenu dans le commutant de $\begin{pmatrix} I & O \\ O & O \end{pmatrix}$. On remarque que le commutant de M contient les matrices diagonales par blocs $\begin{pmatrix} C & O \\ O & D \end{pmatrix}$ où $C \in \mathcal{C}(A)$ et $D \in \mathcal{C}(B)$. Si $\begin{pmatrix} A' & O \\ O & B' \end{pmatrix}$ est dans le bicommutant de M, alors il est immédiat que A' doit être dans le bicommutant de A et B' dans le bicommutant de B. Donc il existe deux polynômes P et Q tels que $A' = P(A)$ et $B' = Q(B)$.

L'espace vectoriel des matrices de la forme $\begin{pmatrix} P(A) & O \\ O & Q(B) \end{pmatrix}$ est de dimension $\deg \pi_A + \deg \pi_B$. Le polynôme minimal de M est le pgcd de π_A et π_B. Comme ces deux polynômes sont premiers entre eux, $\pi_M = \pi_A \pi_B$. En particulier $\deg \pi_M = \deg \pi_A + \deg \pi_B$. La dimension du bicommutant de M est donc majorée par $\deg \pi_M$. Comme elle est minorée par $\deg \pi_M$, on a l'égalité, et le résultat demandé.

(d) D'après ce qui précède, la dimension du bicommutant de M est égale à celle de $\mathbf{K}[M]$, donc le bicommutant est bien égal à l'algèbre des polynômes en M. (En particulier si P et Q sont deux polynômes, il existe donc un polynôme T vérifiant $T(A) = P(A)$ et $T(B) = Q(B)$ ce qui pouvait se démontrer à l'aide du théorème des restes chinois pour les polynômes).

7. On suppose maintenant $u = \lambda \mathrm{Id}_E + n$ avec n nilpotent.

(a) Par un calcul direct, un endomorphisme commute avec u si et seulement s'il commute avec n, donc $\mathcal{C}(u) = \mathcal{C}(n)$ et

$$\begin{aligned}\mathcal{CC}(u) &= \mathcal{C}(\mathcal{C}(u)) \\ &= \mathcal{C}(\mathcal{C}(n)) \\ &= \mathcal{CC}(n).\end{aligned}$$

(b) Par stabilité des sous espaces E_i la matrice de n est diagonale par blocs. Par choix de la base de E_i, le bloc correspondant à E_i est la matrice compagnon du polynôme $X^{\dim E_i}$ donc de la forme $C_{\dim E_i}$.

(c) On procède par récurrence sur le nombre de matrices compagnons.

i. Si la matrice est une matrice compagnon, l'endomorphisme n est cyclique, donc le commutant est $\mathcal{C}(n) = \mathbf{K}[n]$, puis $\mathbf{K}[n]$ étant une algèbre commutative, $\mathcal{CC}(n) = \mathbf{K}[n]$.

ii. Supposons le résultat vérifié dans le cas ou la matrice de n comporte k matrices compagnons $C_{d_1},\dots,C_{d_k}$ de taille $d_1 \leqslant \cdots \leqslant d_k$. Soit n une matrice diagonale par blocs contenant $k+1$ blocs formés de matrices compagnons de taille $d_1 \leqslant \cdots \leqslant d_k \leqslant d_{k+1}$. On considère la projection p sur $\bigoplus_{i=1}^{k} E_i$ associée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{k+1} E_i$. D'après l'étude faite en 6 b), qui ne fait pas intervenir le fait que π_A et π_B sont premiers entre eux, le bicommutant de M est contenu dans l'ensemble des matrices diagonales par blocs $\mathrm{diag}(P(\mathrm{diag}(C_{d_1},\cdots,C_{d_k})),Q(C_{d_{k+1}}))$. Soit alors q_k définie par $q_{k|\sum_{i=1}^{k} E_i} = O$ et $q_k(R(n)(x_{k+1})) = R(n)(x_k)$ pour tout polynôme R de $\mathbf{K}[X]$. L'endomorphisme q_k est bien défini car si $R(n)(x_{k+1}) = 0$ alors $R(n)(x_k) = 0$ ($d_{k+1} \geqslant d_k$), et commute avec n. Alors si v est un élément du bicommutant de la forme $\mathrm{diag}(P(\mathrm{diag}(C_{d_1},\cdots,C_{d_k})),Q(C_{d_{k+1}}))$, on a d'une part $v(q_k(x_{k+1})) = P(n)(x_k)$, et d'autre part $q_k(v(x_{k+1})) = q_k(Q(n)(x_{k+1}))$ soit encore $P(n)(x_k) = Q(n)(x_k)$ donc X^{d_k} divise $P-Q$, et v correspond à $Q(n)$. Le bicommutant de n est donc contenu dans, puis égal à $\mathbf{K}[n]$.

8. D'après II.5) on peut supposer le polynôme caractéristique de M scindé (en prenant pour L une clôture algébrique de K). Le cas général se traite par récurrence sur le nombre de sous-espaces caractéristiques :
- L'initialisation, donc le cas où il n'y a qu'un seul sous-espace caractéristique associé à une valeur propre λ est traitée par la question 7).
- L'hérédité provient de la décomposition en somme directe des sous-espaces caractéristiques, en utilisant 6).

Partie III – Décomposition de Dunford pour une matrice

1. M est semi-simple si elle est diagonalisable dans une extension convenable de $\mathbf{K}$, ce qui revient à dire que le polynôme minimal de M dans cette extension est scindé à racines simples. D'après II.4 cela signifie que le polynôme minimal de M est à facteurs simples sur $\mathbf{K}$. Réciproquement en caractéristique 0, un polynôme irréductible devient scindé à racines simples dans une clôture algébrique, donc si π_M est à facteurs simples sur $\mathbf{K}$, il est scindé à racines simples dans une clôture algébrique de $\mathbf{K}$, et M est semi-simple.

2. Les polynômes π_A et χ_A ont les mêmes facteurs irréductibles. Donc P divise χ_A et à les mêmes facteurs irréductibles. De plus en caractéristique 0, le pgcd de χ_A et χ'_A admet pour facteurs irréductibles les facteurs multiples de χ_A avec une multiplicité diminuée de 1. D'où l'égalité des trois polynômes P, $\pi_A/pgcd(\pi_A,\pi'_A)$ et $\chi_A/pgcd(\chi_A,\chi'_A)$.

3. Comme le corps $\mathbf{K}$ est de caractéristique 0, il est parfait, donc tout polynôme irréductible est premier avec son polynôme dérivé. $P = P_1 \dots P_k$. Si on note pour $i \in \{1,\dots,k\}$, $P = P_iQ_i$, alors $P' = P'_iQ_i + P_iQ'_i$. Alors P_i est premier avec P'. D'où P est premier avec P'. D'après le théorème de Bezout il existe R et S dans $\mathbf{K}[X]$ tels que $RP + SP' = 1$.

4. On raisonne par linéarité : Pour tout entier k on a d'après la formule du binôme de Newton, il existe un polynôme $Q_k(X,Y)$ de $\mathbf{K}[X,Y]$ tel que
$$(X+Y)^k = X^k + kX^{k-1}Y + Y^2Q_k(X,Y)$$
Donc si $P = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k$ alors
$$P(X+Y) = P(X) + YP'(X) + Y^2\sum_{k=0}^{n} a_kQ_k(X,Y)$$
D'où le résultat en posant $Q(X,Y) = \sum_{k=0}^{n} a_kQ_k(X,Y)$.

5. Par substitution on obtient
$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbf{N}, P(A_{k+1}) &= P(A_k) - P(A_k)S(A_k)P'(A_k) + (P(A_k)S(A_k))^2 Q(A_k, -P(A_k)S(A_k))\\ &= P(A_k)^2(R(A_k) + S(A_k)^2 Q(A_k, -S(A_k)P(A_k)))\end{aligned}$$
Puisque A_{k+1} appartient à $\mathbf{K}[A_k]$, on a l'inclusion $\mathbf{K}[A_{k+1}] \subset \mathbf{K}[A_k]$, et $P(A_{k+1}) \in P(A_k)^2\mathbf{K}[A_k]$. D'où par récurrence immédiate, A_k appartient à $\mathbf{K}[A]$, et $P(A_k)$ appartient à $P(A)^{2^k}\mathbf{K}[A]$. Dès que $2^\ell > max\{\alpha_i, 1 \leqslant i \leqslant k\}$, π_A divise P^{2^ℓ} donc $P(A_\ell) = 0$.
6. On a donc $A = A_\ell + (A - A_\ell)$. Comme P est à facteurs simples, A_ℓ est semi-simple. Par construction $A - A_\ell$ appartient à $P(A)\mathbf{K}[A]$ donc est nilpotent. De plus les polynômes en A commutent donc A_ℓ commute avec $A - A_\ell$. Supposons que $A = S + N$ soit une décomposition en somme d'une matrice semi-simple S et d'une matrice nilpotente N qui commutent. Alors S et N commutent avec A, donc avec les éléments de $\mathbf{K}[A]$. En particulier S, N, A_ℓ et $A - A_\ell$ commutent. Mais alors S et A_ℓ sont simultanément diagonalisables dans une extension convenable de $\mathbf{K}$, et $S - A_\ell = (A - A_\ell) - N$ est nilpotente. Donc $S - A_\ell$ est nulle, $S = A_\ell$ et $N = A - A_\ell$.

Partie IV – Théorie des répliques de Chevalley

1. (a) Si $E_{i,j}$ est la base canonique de $M_{np,mq}(\mathbf{K})$, le sous-espace vectoriel $M_{n,m}(\mathbf{K}) \otimes M_{p,q}(\mathbf{K})$ contient la base canonique de $M_{np,mq}(\mathbf{K})$, puisque
$$E_{(i-1)p+k,(j-1)q+\ell} = e_{i,j} \otimes f_{k,l}.$$
Il est donc égal à $M_{np,mq}(\mathbf{K})$.

   (b) Par bilinéarité du produit tensoriel, si $(e_{i,j})_{i,j}$ et $(f_{k,\ell})_{k,\ell}$ sont des bases de $M_{n,m}(\mathbf{K})$ et $M_{p,q}(\mathbf{K})$, la famille $(e_{i,j} \otimes f_{k,\ell})_{(i,j),(k,\ell)}$ est une famille génératrice de $M_{n,m}(\mathbf{K}) \otimes M_{p,q}(\mathbf{K})$. Comme son cardinal est égal à la dimension de l'espace vectoriel, la famille $(e_{i,j} \otimes f_{k,\ell})_{(i,j),(k,\ell)}$ est une base de cet espace.

   (c) La définition du produit tensoriel pour $\mathbf{K}^{n*} \otimes \mathbf{K}^{m*}$ et ce qui précède, permet d'interpréter, une fois une base choisie, le produit vectoriel $E^* \otimes F^*$. Soient $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(f_j)_{1 \leqslant j \leqslant m}$ des bases de E et F, Soit (ϕ, ψ) un élément de $E^* \times F^*$ on note $\phi \otimes \psi$ la forme linéaire sur $E \otimes F$ définie par $\phi \otimes \psi(e_i \otimes f_j) = \phi(e_i)\psi(f_j)$. On obtient par linéarité de ϕ et ψ :
$$\forall (u, v) \in E \times F, \phi \otimes \psi(u \otimes v) = \phi(u)\psi(v).$$
D'après l' exercice préliminaire sur le dual de $M_{n,m}(\mathbf{K})$, l'application $M_{m,n}(\mathbf{K})$ dans $M_{n,m}(\mathbf{K})^*$ qui à une matrice A associe f_A est un isomorphisme. L'application θ de $M_{n,m}(\mathbf{K})^* \times M_{p,q}(\mathbf{K})^*$ dans $M_{np,mq}(\mathbf{K})^*$ définie par $\theta(f_A, f_B) = f_{A \otimes B}$ est bilinéaire, et induit une application linéaire $\overline{\theta}$ de $M_{n,m}(\mathbf{K})^* \times M_{p,q}(\mathbf{K})^*$ dans $M_{np,mq}(\mathbf{K})^*$, qui vérifie $\overline{\theta}(f_A \otimes f_B) = f_{A \otimes B}$. On vérifie que c'est un isomorphisme, en vérifiant que l'image d'une base de $E^* \otimes F^*$ est une base de $(E \otimes F)^*$.

2. (a) La matrice $A \otimes B$ est formée de n^2 blocs de taille m. Les n blocs diagonaux sont de la forme $a_{i,i}B$. On en déduit $Tr(A \otimes B) = Tr(A)Tr(B)$.

   (b) On vérifie que $A \otimes B = (A \otimes I_m)\mathrm{diag}_n(B)$ où $\mathrm{diag}_n(B)$ est la matrice diagonale formée de n blocs égaux à B. On peut transformer la matrice $A \otimes I_m$ en faisant $\frac{n(n-1)}{2}$ transpositions sur les colonnes, pour regrouper les colonnes contenant les coefficients de la matrice A afin de reformer chaque ligne de A. On fait alors les mêmes $\frac{n(n-1)}{2}$ transpositions sur les lignes, pour obtenir une matrice diagonale par blocs, formée de m blocs égaux à A. D'où $\det(A \otimes B) = \det(A)^m \det(B)^n$.

3. L'espace vectoriel $\mathcal{N}_{1,1}$ n'est autre que $\mathbf{K}^n \otimes (\mathbf{K}^n)^*$ soit $M_n(\mathbf{K})$. L'action de $A_{1,1}$ sur $M_n(\mathbf{K})$ se détermine sur la base $e_i \otimes e_j^*$ de $M_n(\mathbf{K})$. Soit

$$\begin{aligned} A_{1,1} \cdot (e_i \otimes e_j^*) &= Ae_i \otimes e_j^* - e_i \otimes e_j^* A \\ &= (\sum_{k=1}^n a_{k,i} e_k) \otimes e_j^* - e_i \otimes \sum_{\ell=1}^n a_{j,\ell} e_\ell^* \\ &= \sum_{k=1}^n a_{k,i} e_k \otimes e_j^* - \sum_{\ell=1}^n a_{j,\ell} e_i \otimes e_\ell^* \end{aligned}$$

D'autre part

$$A(e_i \otimes e_j^*) = \sum_{k=1}^n a_{\ell,i} e_\ell \otimes e_j^*$$

et

$$(e_i \otimes e_j^*)A = \sum_{\ell=1}^n a_{j,\ell} e_i \otimes e_\ell^*$$

D'où le résultat

$$A_{1,1} \cdot (e_i \otimes e_j^*) = [A, e_i \otimes e_j^*].$$

Par linéarité de l'action on obtient pour tout M dans $M_n(\mathbf{K})$, $A_{1,1} \cdot M = [A, M]$.

4. Soit $e_1, \dots e_n$ la base canonique de $\mathbf{K}^n$, $f_1, \dots, f_n$ la base duale. On utilise l'isomorphisme canonique définit par

$$e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_s} \otimes f_{j_1} \otimes \cdots \otimes f_{j_r} \to {}^t f_{j_1} \otimes \cdots \otimes {}^t f_{j_r} \otimes {}^t e_{i_1} \otimes \cdots \otimes {}^t e_{i_s}.$$

5. Si P est une matrice inversible de $M_n(\mathbf{K})$, elle correspond à un changement de base de $\mathbf{K}^n$. L'expression de $\Phi_{P,r,s}$ sur une base de $\mathcal{N}_{r,s}$ de la forme $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes f_{j_1} \otimes \cdots \otimes f_{j_s}$ défini bien un unique endomorphisme de $\mathcal{N}_{r,s}$. Par linéarité du produit tensoriel par rapport à chaque composante, l'expression reste valable pour les tenseurs de la forme $X_1 \otimes \cdots X_r \otimes Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_s$. De plus c'est un isomorphisme, d'isomorphisme réciproque $\Phi_{P^{-1},r,s}$.

6. Si A et B sont semblables, alors il existe une matrice P inversible dans $M_n(\mathbf{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$. Alors par identification sur la base de $\mathcal{N}_{r,s}$ formée à partir des e_i et des f_j,

$$\forall n \in \mathcal{N}_{r,s}, A_{r,s}.\Phi_{P,r,s}(n) = \Phi_{P,r,s}(B_{r,s}(n)).$$

Donc

$$B_{r,s} = \Phi_{P,r,s}^{-1} \circ A_{r,s} \circ \Phi_{P,r,s}.$$

Les endomorphismes obtenus $B_{r,s}$ et $A_{r,s}$ ont des matrices semblables.

7. (a) C'est immédiat en utilisant 5) et 6) et une base de vecteurs propres de A. Soit $u_1, \dots u_n$ une base de vecteurs propres, $Au_i = \lambda_i u_i$, et u_i^* la base duale $u_i^* A = \lambda_i u_i^*$. Si P est la matrice inversible telle que $Pe_i = u_i$, alors $P^{-1}AP = D$ est diagonale. La base formée des tenseurs $u_{i_1} \otimes \cdots \otimes u_{i_r} \otimes u_{j_1}^* \otimes \cdots \otimes u_{j_s}^*$ est une base de vecteurs propres pour $A_{r,s}$, les valeurs propres correspondantes étant $\sum_{p=1}^r \lambda_{i_p} - \sum_{q=1}^s \lambda_{j_q}$.

   (b) On a pour tout entier k strictement positif

$$A_{r,s}^k.n = \sum_{\substack{n_1,\cdots,n_r \geqslant 0 \\ n_1+\cdots+n_r=k}} A^{n_1} X_1 \otimes \cdots \otimes A^{n_r} X_r - \sum_{\substack{m1,\cdots,m_r \geqslant 0 \\ m_1+\cdots+m_s=k}} Y_1 A^{m_1} \otimes \cdots \otimes Y_s A^{m_s}$$

   D'où si $k = n(r+s)$, pour chaque décomposition $n(r+s) = \sum_{i=1}^r n_i$ et $n(r+s) = \sum_{j=1}^s m_j$, l'un au moins des couples (A^{n_i}, A^{m_j}) est égal à $(0,0)$, donc $A_{r,s}^{n(r+s)} = 0$. L'endomorphisme $A_{r,s}$ est donc nilpotent.

8. (a) C'est la transitivité de la relation $\Rightarrow$.
   (b) C'est une conséquence directe de $(A_{r,s})_{r',s'} = A_{rr'+ss',rs'+sr'}$.
9. (a) Si A' est une réplique de A alors

$$\forall n \in \mathcal{N}_{1,1}, A_{1,1}.n = 0 \Rightarrow A'_{1,1}.n = 0.$$

Or $\mathcal{N}_{1,1} = M_n(\mathbf{K})$, et $A_{1,1}(M) = [A, M]$ et $A'_{1,1}(M) = [A', M]$. Donc A' est dans le bicommutant de A. C'est un polynôme en A. De plus $A_{1,0}X = AX$ donc le noyau de A est contenu dans le noyau de A'. Si A n'est pas inversible, et si $A' = P(A)$ alors pour tout X dans le noyau de A, $A'X = P(0)X$. Il faut donc $P(0) = 0$. Si A est inversible et si $\chi_A(X) = XQ(X) + (-1)^n \det(A)$ alors d'après Cayley–Hamilton, $Q(A)A = (-1)^{n+1}\det(A)Id_n$, et tout polynôme en A s'écrit comme un polynôme en A sans terme constant :

$$(XR(X) + a)(A) = (R(A) + (-1)^{n+1}\frac{a}{\det(A)}Q(A))A.$$

   (b) Si A' est une réplique de A alors $A'_{r,s}$ est une réplique de $A_{r,s}$ donc un polynôme sans terme constant en $A_{r,s}$. Réciproquement si pour tout couple (r, s) il existe un polynôme $P_{r,s}$ tel que $A'_{r,s} = P_{r,s}(A_{r,s})A_{r,s}$, alors

$$\forall n \in \mathcal{N}_{r,s}, A_{r,s} \cdot n = 0 \Rightarrow A'_{r,s} \cdot n = 0.$$

Donc A' est une réplique de A.
10. (a) On vérifie par n-linéarité du produit tensoriel $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$, que

$$\forall r, s \geqslant 0, (A + B)_{r,s} = A_{r,s} + B_{r,s}.$$

D'après la décomposition de Dunford, $A = D + N$ avec $[D, N] = 0$, D semi-simple et N nilpotent. D'où

$$\forall r, s \geqslant 0, A_{r,s} = D_{r,s} + N_{r,s}, [D_{r,s}, N_{r,s}] = [D, N]_{r,s} = 0.$$

D'après 7) $D_{r,s}$ est semi-simple et $N_{r,s}$ nilpotente. Comme ces deux matrices commutent, la décomposition de Dunford de $A_{r,s}$ est $A_{r,s} = D_{r,s} + N_{r,s}$.
   (b) Par stabilité du noyau de $A_{r,s}$ par $D_{r,s}$ et $N_{r,s}$, les endomorphismes du noyau de $A_{r,s}$ induits par $D_{r,s}$ et $N_{r,s}$ donne la décomposition de Dunford de l'endomorphisme nul, donc $D_{r,s}$ et $N_{r,s}$ s'annulent sur le noyau de $A_{r,s}$. On en déduit que D et N sont des répliques de A.
11. Supposons que B soit une réplique de A. D'après la question 5, si A est diagonalisable, en utilisant la matrice P des coordonnées d'une base de vecteur propres de A, et les isomorphismes $\Phi_{P,r,s}$, on peut se ramener au cas d'une matrice diagonale $D = P^{-1}AP$. On peut donc directement supposer A diagonale de valeurs propres $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. La réplique B de A est alors diagonale de valeurs propres $(P(\lambda_i))_{1\leqslant i\leqslant n}$ où P est un polynôme sans terme constant. D'après la question 7, les valeurs propres de $A_{r,s}$ sont de la forme

$$\sum_{p=1}^{r} \lambda_{i_p} - \sum_{q=1}^{s} \lambda_{j_q}.$$

La matrice $B_{r,s}$ est alors diagonale de valeurs propres :

$$\sum_{p=1}^{r} P(\lambda_{i_p}) - \sum_{q=1}^{s} P(\lambda_{j_q}).$$

En particulier les noyaux $\ker A_{r,s}$ et $\ker B_{r,s}$ correspondent aux sous-espaces propres associés à la valeur propre 0. D'où $\ker A_{r,s} \subset \ker B_{r,s}$ se traduit par les implications

$$\sum_{p=1}^{r} \lambda_{i_p} - \sum_{j=1}^{q} \lambda_{j_q} = 0 \to \sum_{p=1}^{r} P(\lambda_{i_p}) - \sum_{j=1}^{q} P(\lambda_{j_q}) = 0.$$

En utilisant le fait que ces implications sont vérifiées pour tout r, s positifs ou nuls, on en déduit

$$\forall (a_i) \in \mathbf{Z}^n, \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i P(\lambda_i) = 0.$$

Les applications $\mathbf{Q}$-linéaires $f : \mathbf{Q}^n \to \mathbf{Q}\langle \lambda_i \rangle$ et $g : \mathbf{Q}^n \to \mathbf{K}$ définies par $f(a_1, \cdots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i$ et $g(a_1, \cdots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i P(\lambda_i)$ vérifient $\ker f \subset \ker g$. Par le théorème de factorisation, il existe une application $\mathbf{Q}$ linéaire ϕ de $\mathbf{Q}\langle \lambda_i \rangle$ dans $\mathbf{K}$ telle que $g = \phi \circ f$. Cette application linéaire vérifie $\phi(\lambda_i) = P(\lambda_i)$. Réciproquement, si une telle application linéaire existe alors pour tout r, s positifs ou nuls, les valeurs propres nulles de $A_{r,s}$ donne par linéarité de ϕ, des valeurs propres nulles pour $B_{r,s}$ d'où $\ker A_{r,s} \subset \ker B_{r,s}$. La matrice B est donc une réplique de A.

12. (a) Si $n = 1$, alors $A = 0$ puis $B = 0$. Pour $n = 2$ une matrice nilpotente A vérifie $A^2 = 0$ donc les polynômes en A sans terme constant sont de la forme λA.

(b) On suppose le résultat établi au rang $n-1$. Soit A la matrice compagnon nilpotente cyclique d'ordre n, on a donc $A.e_i = e_{i+1}$ pour $i < n$ et $A.e_n = O_E$. Si B est une réplique de A, c'est un polynôme en A, et comme il commute avec A, l'image de A est stable par B. Soit A' la matrice induite par A sur $E' = \langle e_2, \cdots, e_n \rangle$. C'est la matrice compagnon de l'endomorphisme cyclique induit $e_i \to e_{i+1}$ pour $2 \leqslant i < n$ $e_n \to O'_E$. Par stabilité de E' par A et B, $A'_{r,s}$ et $B'_{r,s}$ sont induit par $A_{r,s}$ et $B_{r,s}$ sur les tenseurs de support dans E' et E'^* qui s'identifient à

$$\mathcal{N}'_{r,s} = \langle e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^*_{j_1} \otimes \cdots \otimes e^*_{j_s},\, i_1 > 1, \ldots i_r > 1, j_1 > 1, \ldots, j_s > 1. \rangle$$

En particulier si $\ker A_{r,s} \subset \ker B_{r,s}$ alors $\ker A'_{r,s}$ s'identifie à $\ker A_{r,s} \cap \mathcal{N}'_{r,s}$, on a alors l'inclusion $\ker A'_{r,s} \subset \ker B'_{r,s}$. La matrice B' est donc une réplique de A'. D'où l'existence de λ tel que $B' = \lambda A'$. Si $C = B - \lambda A$, il reste à calculer l'image de e_1. On a

$$C \cdot e_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i.$$

Par construction $CA = 0$, d'où

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i e_{i+1} = O_E$$

On obtient donc $a_i = 0$ pour $i \leqslant n$ d'où le résultat annoncé.

(c) On regarde l'action sur $\mathcal{N}_{2,0}$ en utilisant la base $f_{i,j} = e_i \otimes e_j$. On a

$$\begin{aligned} i \neq n, , j \neq n, A_{2,0}(e_i \otimes e_j) &= e_{i+1} \otimes e_j + e_i \otimes e_{j+1} \\ A_{2,0}(e_n \otimes e_n) &= 0 \\ j < n,\ A_{2,0}(e_n \otimes e_j) &= e_n \otimes e_{j+1} \\ i < n,\ A_{2,0}(e_i \otimes e_n) &= e_{j+1} \otimes e_n \end{aligned}$$

La matrice $A_{2,0}$ est triangulaire inférieure par blocs de taille n.

$$A_{2,0} = \begin{pmatrix} A & & & \\ I & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & I & A \end{pmatrix},$$

où seuls les blocs non nuls sont indiqués.
Si P est un polynôme $P(A_{2,0})$ est donc triangulaire inférieure par blocs de taille n, les blocs sur la diagonale étant $P(A)$ et ceux en dessous de la forme $P'(A)$. (Immédiat par récurrence sur les puissances de la matrice ou par la formule $P(X+Y) = P(X)+YP'(X)+Y^2Q(X,Y)$ en substituant X par la matrice diagonale par bloc $diag_n(A)$ et Y par $A_{2,0} - diag_n(A)$).

Supposons C non nulle, c'est une réplique de A, et on peut supposer $\mu = 1$, c'est à dire $C = A^{n-1}$. Alors

$$C_{2,0} = \begin{pmatrix} A^{n-1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ I & & & A^{n-1} \end{pmatrix},$$

où seuls les blocs non nuls apparaissent. On en déduit puisque $n > 2$, que les blocs en dessous de la diagonale sont nuls. Si $C_{2,0} = Q(A_{2,0})$ alors $Q'(A) = 0$ donc X^n divise Q, d'où $Q(A) = 0$, ce qui contredit $Q(A) = A^{n-1}$. Donc $C = 0$ et $B = \lambda A$.

13. On suppose maintenant A nilpotente quelconque. On peut décomposer l'espace en somme directe d'espaces cycliques. On se ramène, après un changement de base, au cas d'une matrice diagonale par blocs formée de matrices compagnons d'endomorphismes cycliques nilpotents.
Soit d le degré du polynôme minimal de A, on a donc $A^d = 0$. Si $e_{n-d}, \cdots, e_d$ est une base d'un espace cyclique de dimension d, le raisonnement fait précédemment montre que si B est une réplique de A, la matrice B' induite par B sur $\langle e_{n-d}, \cdots, e_n\rangle$ est une réplique de la matrice A' induite par A. En particulier il existe λ tel que $B' = \lambda A'$ Comme B est une réplique de A, c'est un polynôme en A : $Q(A)$. Le polynôme $Q(A)$ ne dépend que de la classe de Q modulo X^d, et puisque $B' = Q(A')$ cette classe est λX. D'où $B = \lambda A$.

14. On considère la décomposition de DUNFORD $A = D + N$.
   (a) Soit $B = \Delta + M$ la décomposition de DUNFORD d'une réplique de A. Comme Δ et M sont des répliques de B, elles sont des répliques de A. Δ est donc une réplique de A, donc de la forme $P(A)$ où P est un polynôme sans terme constant. On en déduit $\Delta = P(D+N)$ puis si $P(X+Y) = P(X) + YP'(X) + Y^2Q(X,Y)$, alors

   $$\Delta = P(D) + N(P'(D) + NQ(D,N)$$

   Cette écriture à lieux dans l'algèbre commutative $\mathbf{K}[D,N]$, $P(D)$ est semi-simple, car si D est diagonalisable dans une extension, $P(D)$ aussi. $N(P'(D)+NQ(D,N))$ est nilpotente et commute avec $P(D)$. On a donc obtenu la décomposition de DUNFORD de $P(\Delta)$. D'après l'unicité $\Delta = P(D)$ et $N(P'(D) + NQ(D,N) = 0$. Ce raisonnement se fait pour chaque couple (r,s) d'entiers positifs. Donc $\Delta_{r,s}$ est un polynôme en $D_{r,s}$ sans terme constant. Δ est donc une réplique de D.
   (b) De même M est un polynôme non constant en A. $M = P_1(D)+N(P_1'(D)+NQ_1(D,N))$ est la décomposition de DUNFORD de M. D'où $P_1(D) = 0$, et $M = N(P_1'(D) + NQ_1(D,N))$. Comme N et $P_1'(D)+NQ_1(D,N)$ commutent, le noyau de N est contenu dans celui de M. Ce raisonnement se fait pour tout couples (r,s) d'entiers positifs, donc M est une réplique de N.
   (c) Si $A = D + N$ est la décomposition de DUNFORD de A les répliques de A sont de la forme $P(D) + \lambda N$ où λ est un élément de $\mathbf{K}$ et P un polynôme de $\mathbf{K}[X]$ tel que l'application qui a une valeur propre λ_i associe $P(\lambda_i)$ se prolonge en une application linéaire de $\mathbf{Q}\langle\lambda_i\rangle$ dans $\mathbf{K}(\lambda_i)$.

15. Soit A dans $M_n(\mathbf{K})$, si A est nilpotente, toute réplique de A est de la forme λA donc $Tr(AA') = \lambda Tr(A^2) = 0$. Réciproquement supposons $Tr(AB) = 0$ pour toute réplique B de A. Soit $A =$

$D+N$ la décomposition de DUNFORD de A, si B est une réplique de A, B commute avec N, donc BN est nilpotent. D'où $Tr(BN) = 0$ puis $Tr(DB) = 0$. Si Δ est une réplique de D, c'est une réplique de A, donc $Tr(D\Delta) = 0$. Considérons une forme $\mathbf{Q}$-linéaire ϕ sur le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{Q}\langle\lambda_i\rangle$. Si π_A est scindé, le polynôme d'interpolation de LAGRANGE défini par $P(\lambda_i) = \phi(\lambda_i)$ est dans $\mathbf{K}[X]$, donc la matrice $\Delta = P(D)$ est une réplique de D et $Tr(DP(D)) = 0$. D'où $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\phi(\lambda_i) = 0$. Comme les $\phi(\lambda_i)$ sont dans $\mathbf{Q}$, on peut calculer l'image par ϕ, ce qui donne $\sum_{i=1}^{n} \phi(\lambda_i)^2 = 0$. Les formes $\mathbf{Q}$-linéaires sont donc nulles, l'espace vectoriel est réduit à $\{0\}$, D est nulle donc A est nilpotente.
Si π_A n'est pas scindé, on considère une extension L/K dans laquelle π_A est scindé. Si $\mathcal{R}_L(A)$ est l'espace vectoriel des répliques de A dans $M_n(L)$, d'après 9.b)

$$\mathcal{R}_L(A) = \{A' \in M_n(L), \forall r \geqslant 0 \forall s \geqslant 0,\ A'_{r,s} \in \langle A^i_{r,s}, 1 \leqslant i \leqslant \deg \pi_{A_{r,s}}\rangle\}.$$

est défini par des équations à coefficients dans K, d'où $\dim_L \mathcal{R}_L(A) = \dim_K \mathcal{R}_K(A)$. L'espace $\mathcal{R}_L(A)$ admet une base formée d'éléments de $\mathcal{R}_K(A)$, et par L-linéarité de la trace, pour toute réplique A' de A dans $M_n(L)$, $Tr(AA') = 0$. On se ramène donc au cas précédent. La matrice A est nilpotente.