Dev : Formule de Stirling (Preuve probabiliste) (1)

Thm : $\boxed{\dfrac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

Preuve. Soit (X_n) v.a. i.i.d de loi de Poisson de paramètre 1. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $Z_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$.

On rappelle que $E(X_1) = Var(X_1) = 1$ et $E(S_n) = Var(S_n) = n$.

Par ailleurs on a $S_n \overset{\mathcal{L}}{=} \mathcal{P}(n)$ (résultat que l'on peut montrer ensuite si on a le temps).

Etape 1 : TCL. Si $Z \overset{\mathcal{L}}{=} \mathcal{N}(0,1)$ alors

$Z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} Z$ ainsi puisque Z est à densité

$\forall t \in \mathbb{R}$, $P(Z_n > t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P(Z>t) = \int_t^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\frac{du}{\sqrt{2\pi}}$.

Etape 2 : On veut montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\infty} P(Z_n>t)\,dt = \int_0^{\infty} P(Z>t)\,dt. \quad (*)$$

Pour cela on utilise le thm de CV dominée.

$\cdot\ \forall t>0$, $\{Z_n > t\} \subset \{Z_n^2 > t^2\}$

donc $P(Z_n>t) \le P(Z_n^2>t^2) \le \frac{E(Z_n^2)}{t^2}$

par Markov.

(2)

$E(Z_n^2) = Var(Z_n) = Var\left(\frac{S_n-n}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{n} Var(S_n) = 1$

Ainsi $P(Z_n>t) \le \min\{1, \frac{1}{t^2}\}$ qui est une fonction indépendante de n et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. La formule $(*)$ est donc vraie.

On calcule les intégrales :

a) $\int_0^{\infty} P(Z>t)\,dt = \int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_t^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du\,dt = \int_0^{\infty}\int_0^{u}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}\,dt\,du$

$= \int_0^{\infty}\frac{u e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

b) $\int_0^{\infty} P(Z_n>t)\,dt = \int_0^{\infty} P\left(\frac{S_n-n}{\sqrt{n}}>t\right)dt$

$= \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty} P(S_n=k)\,\mathbb{1}_{\{k>t\sqrt{n}+n\}}\,dt.$

$= \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-n}\frac{n^k}{k!}\frac{k-n}{\sqrt{n}}$

$= \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}\left[\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{n^k}{(k-1)!} - \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{n^{k+1}}{k!}\right]$

$= \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}\frac{n^{n+1}}{n!}$

On a donc la formule de Stirling.

Lemme : Si $X = \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y = \mathcal{P}(\mu)$, $\lambda, \mu > 0$
X ind. de Y alors $X+Y = \mathcal{P}(\lambda+\mu)$

Preuve $\forall t \in \mathbb{R}^+$ $G_X(t) = E(t^X)$

$$= \sum_{k\in\mathbb{N}} t^k P(X=k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} t^k e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda+\lambda t} = e^{-\lambda(1-t)}$$

$$G_{X+Y}(t) = e^{-\lambda(1-t)} e^{-\mu(1-t)} \quad \text{car } X \text{ ind. de } Y$$

$$= e^{-(\mu+\lambda)(1-t)}$$

donc puisque la fonction génératrice caractérise une loi sur $\mathbb{N}$ on a $X+Y = \mathcal{P}(\lambda+\mu)$ ∎.

Ref. Internet Romain Giugs.

Developpement : $\boxed{\text{Suite equirepartie modulo 1.}}$

1

Def : $N_n(a,b) = \#\{k \in \{0,\dots,n\},\ x_n \in [a,b]\}$

(x_n) suite de $[0,1]$.

(x_n) st equirepartie modulo 1 ssi $\forall\, 0 \leq a, \leq b < 1$

$$\frac{N_n(a,b)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} b-a$$

Théorème : Soit (x_n) une suite dans $[0,1]$. Les propriétés suivantes sont equivalentes

(i) (x_n) st equirepartie

(ii) $\forall f \in \mathcal{E}([0,1],\mathbb{R})$ $\frac{1}{n}\sum_0^n f(x_n) \longrightarrow \int f(t)\,dt$, $f(0)=f(1)$

(iii) $\forall p \in \mathbb{Z}^*$ $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} e^{2i\pi p x_k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

App : $\forall \theta \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, la suite $(\theta n \bmod 1)$ st équirepartie modulo 1.

Preuve du theorem :

$(i) \Rightarrow (ii)$. $N_n(a,b) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{[a,b]}(x_n) \longrightarrow b-a$

Donc (ii) st verifiée pour ~~toute~~ les indicatrices de segment.

Par linéarité (ii) st verifiée pour les fonctions en escalier sur $[0,1]$. Soit $\varepsilon > 0$

Soit $f \in \mathcal{E}^0([0,1],\mathbb{R})$ $\exists\, g$ en escalier tq

$\|f-g\|_\infty \leq \varepsilon$ ~~[illegible]~~ sur $[0,1]$

②.

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) - \int_0^1 f(t)\,dt\right| \le \underbrace{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\big(f(x_k)-g(x_k)\big)\right|}_{\le \varepsilon} + \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(x_k) - \int_0^1 g(t)\,dt\right| + \underbrace{\left|\int_0^1 g(t)\,dt - \int_0^1 f(t)\,dt\right|}_{\le \varepsilon}.$$

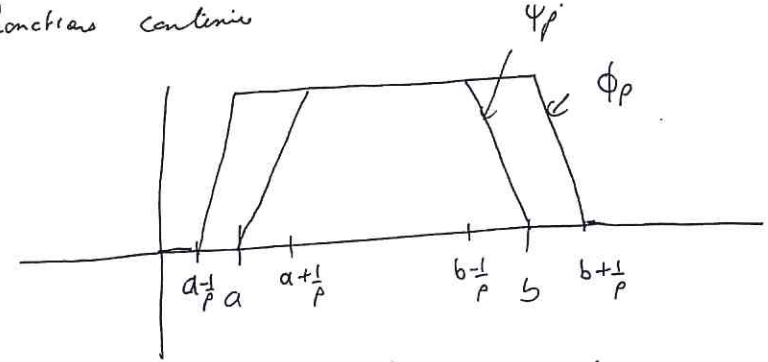
$\exists N$ tq $\forall n \geq N$ $\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(x_k) - \int_0^1 g(t)\,dt\right| \le \varepsilon$

car g est en escalier.

Ainsi $\forall n \geq N$, $\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) - \int_0^1 f(t)\,dt\right| \le 3\varepsilon$

d'où le resultat.

(ii) ⇒ (i) Il faut approcher la fonction $\mathbb{1}_{[a,b)}$ avec des fonctions continues



On a. $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \psi_p(x_k) \le N_n(a,b) \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \phi_p(x_k)$

③

Soit $\varepsilon>0$ et p tq $\frac{1}{p}<\varepsilon$ alors $\exists N>0$ tq

$\forall n \geq N$ $\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\psi_p(x_k) - (b-a-\frac{1}{p})\right| \le \varepsilon$

$\left|\frac{1}{n}\sum \phi_p(x_k) - (b-a+\frac{1}{p})\right| \le \varepsilon$

Ainsi $|N_n(a,b)-(b-a)| \le 3\varepsilon$ ce qui demontre (i).

(i) ⇒ (iii) Evident

(iii) ⇒ (ii) Par linéarité, (ii) est verifiée pour les polynomes trigonometriques. Puisque $f(0)=f(1)$, f est 1-periodique et on peut approcher uniformement f par un polynome trigonometrique.

<u>App</u>: On applique la (iii). $\forall p \in \mathbb{Z}^*$.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi p(\theta k)} = \frac{1}{n}\, e^{2i\pi p\theta}\, \frac{1-e^{2i\pi p\theta n}}{1-e^{2i\pi p\theta}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

D'où le resultat par la condition (iii)

<u>Ref</u> = Chambert-Loir, Fermigier, Maillot
Exercices de mathématiques pour l'agrégation
Analyse 1 p 133