Développement : zéros equa diff.

Théorème : On pose $E : Y'' + qY = 0$; $q \in \mathcal{C}^1([a,+\infty[, \mathbb{R}_*^+)$ tel que :

1) $\int_a^{+\infty} \sqrt{q(u)}\,du = +\infty$ 2) $q'(x) = O_{+\infty}(q^{3/2}(x))$ alors :

$N : x \to \text{card}\{u \in [a,x] \mid Y(u)=0\} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi}\int_a^x \sqrt{q(u)}\,du.$

preuve : lemme : $y_1, y_2 \in \mathcal{C}^1([a,+\infty[, \mathbb{R}_*^+)$ sans zéro commun alors en posant :

$w = y_1 y_2' - y_1' y_2$ et $y_1(a) + i y_2(a) = r_0 e^{i\phi_0}$; $\exists r, \phi \in \mathcal{C}^1([a,+\infty[)$ tel que

$y_1 = r\cos(\phi)$; $y_2 = r\sin(\phi)$ et $\forall x$; $r(x) = (y_1(x)^2 + y_2(x)^2)^{\frac{1}{2}}$; $\phi(x) = \phi_0 + \int_a^x \frac{w(t)}{r(t)}\,dt$

① changement de variable : On pose $\tau(x) = \int_a^x \sqrt{q(u)}\,du \in \mathcal{C}^1([a,+\infty[, \mathbb{R})$

on a $\tau'(x) = \sqrt{q(x)} > 0$ et $\tau(x) \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

$\tau(x)$ est donc une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $[a,+\infty[$ vers $[0,+\infty[$.

On pose $Y = y \circ \tau^{-1}$ donc $\forall x > 0$ $y'(x) = Y'(\tau(x))\sqrt{q(x)}$; $y''(x) = Y''(\tau(x))q(x) + Y'(x)\frac{q'(x)}{2\sqrt{q(x)}}$

donc : $0 = y''(x) + q(x)y(x) = q(x)Y''(\tau(x)) + \frac{q'(x)}{2\sqrt{q(x)}}Y'(\tau(x)) + q(x)Y(\tau(x))$

On pose $\forall t \geq 0$; $\varphi(t) = \frac{q'(\tau^{-1}(t))}{2q^{3/2}(\tau^{-1}(t))}$ donc $Y'' + \varphi Y' + Y = 0$ (E')

② On utilise le lemme :

$Y = r\sin(\phi)$ $(*)$; $Y' = r\cos(\phi)$ car Y et Y' n'ont pas de zéro commun sinon par cauchy-lipschitz $Y \equiv 0$. donc $Y' = r'\sin(\phi) + r\phi'\cos(\phi) = r\cos(\phi)$ (1)

$Y'' = r'\cos(\phi) - r\phi'\sin(\phi) \overset{E'}{=} -\varphi r\cos(\phi) - r\sin(\phi)$ (2)

$\cos(\phi)\times(1) - \sin(\phi)\times(2) = r + \varphi r\cos(\phi)\sin(\phi) = r\phi'$ d'où $\phi' = 1 + \varphi\cos(\phi)\sin(\phi)$

d'où $|\phi'(t) - 1| \leq \frac{1}{2}|\varphi(t)|$

③ étude asymptotique : $\varphi(t) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ par hypothèse. $\phi'(t) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $\phi(t) \underset{+\infty}{\sim} t$

soit $M(t)$ le nombre de zéros de Y sur $[0,t]$; montrons que $M(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{t}{\pi}$.

montrons d'abord par l'absurde que $M(t) < +\infty$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

si $\exists t_0$ tel que $M(t_0) = +\infty$ alors il y a un point d'accumulation de Y dans $[0,t_0]$ noté U.

↳ soit $(U_n)_n$ suite des zéros de Y tendant vers U. $0 = \frac{Y(U_n) - Y(U)}{U_n - U} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} Y'(U)$

ce qui contredit l'absence de zéro commun de Y et Y'.

donc $M(t) < +\infty$.

fixons $t_0 \geq 0$ tel que $\phi'(t) > 0$ sur $[t_0,+\infty[$ alors :

$M(t) \underset{+\infty}{\sim} \text{card}\{u \in [t_0,t] \mid (*) \sin(\phi(u)) = 0\} = \text{card}\{v \in [\phi(t_0), \phi(t)] \mid \sin(v) = 0\}$

ϕ est un $\mathcal{C}^1$ difféo de $[t_0,t]$ sur $[\phi(t_0), \phi(t)]$ donc

$M(t) \underset{+\infty}{\sim} \text{card}\{k \in \mathbb{Z} \mid \phi(t_0) \leq k\pi \leq \phi(t)\} = E\left(\frac{\phi(t)}{\pi}\right) - E\left(\frac{\phi(t_0)}{\pi}\right)$ et $N(x) = M(\tau(x))$

$M(t) \sim \frac{\phi(t)}{\pi} \sim \frac{t}{\pi}$ donc $N(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\tau(x)}{\pi} = \frac{1}{\pi}\int_a^x \sqrt{q(u)}\,du.$

Développement :

preuve du lemme :

posons $\varphi = y_1 + i y_2$ par hypothèse cette fonction ne s'annule pas donc

$\psi : x \to \int_a^x \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt + \ln(r_0) + i\phi_0$ est bien définie et $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$

un calcul rapide montre que $(\varphi e^{-\psi})' = 0$ donc $\forall x$;

$$\varphi(x) = e^{\psi(x)}\left(\varphi(a) e^{-\psi(a)}\right) = e^{\psi(x)}\left(r_0 e^{i\phi_0} \times \frac{e^{-i\phi_0}}{r_0}\right) = e^{\psi(x)}$$

$$\varphi(x) = r_0 e^{i\phi_0} \exp\left(\int_a^x \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt\right) = r_0 e^{i\phi_0} \exp\left(\int_a^x \frac{(y_1' + i y_2')(y_1 - i y_2)(t)}{r^2(t)} dt\right)$$

$$= r_0 e^{i\phi_0} \exp\left(i \int_a^x \frac{w(t)}{r(t)^2} dt + \int_a^x \frac{(y_1' y_1 + y_2' y_2)(t)}{r(t)^2} dt\right)$$

$$= r_0 e^{i\phi_0} \exp\left(i \int_a^x \frac{w(t)}{r(t)^2} dt + \ln(r(x)) - \ln(r(a))\right)$$ (pour le voir ; dériver $\ln(r(x))$...)

$$= r(x) e^{i\phi_0} \exp\left(i \int_a^x \frac{w(t)}{r(t)^2} dt\right)$$ car $(r^2)' = y_1' y_1 + y_2' y_2$

donc :

$$\varphi(x) = r(x) e^{i\varphi(x)} \quad \text{où } \varphi(x) = \phi_0 + \int_a^x \frac{w(t)}{r(t)^2} dt.$$