Méthode de Newton

Leçons : 219, 223, 226, 228, 229, 253

Référence : Rouvière Ex 48 p.140

Cette méthode permet de trouver des approximations d'un zéro (ou racine) d'une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles.

Théorème 1 *Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 vérifiant $f(c) < 0 < f(d)$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [c,d]$. f admet donc un unique zéro a dans l'intervalle $]c,d[$.*
On définit F sur $[c,d]$ par

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

On a ainsi $F(a) = a$. Le problème de zéro est ramené à un problème de point fixe.
Pour $x_0 \in [c,d]$, on pose tant qu'on peut $x_{n+1} = F(x_n)$

1. *Il existe un intervalle $J = [a-\alpha, a+\alpha]$ stable par F. En prenant $x_0 \in J$, la suite définie par $x_{n+1} = F(x_n)$ converge de façon quadratique (d'ordre 2) vers le point fixe a.*
2. *Si, de plus, on suppose que f est convexe, on n'a plus besoin de prendre x_0 proche de a, comme le montre le résultat suivant :*
   Si $f'' > 0$ sur $[c,d]$ et $x_0 > a$, alors la suite (x_n) est bien définie, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n > a$.
   Dans ce cas, on a l'équivalent : $x_{n+1} - a \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2$.

Preuve :

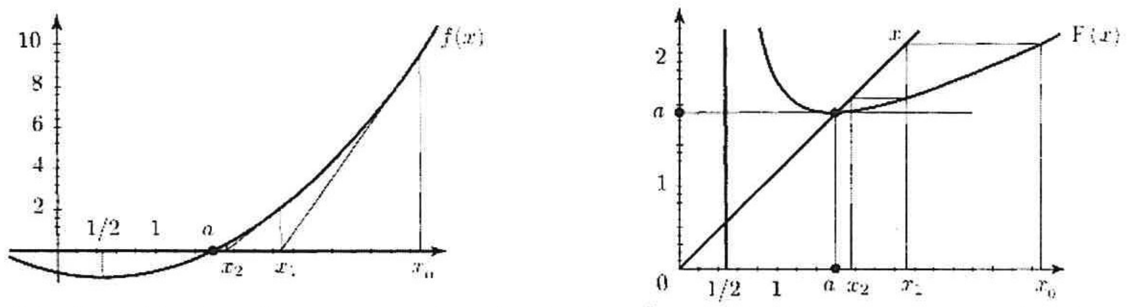

Fig. La méthode de Newton pour l'équation $f(x) = x^2 - x - 1 = 0$ revient à itérer la fonction $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = (x^2+1)/(2x-1)$.

Étape 1 :(question 1)
Pour $x \in [c,d]$:

$$F(x) - a = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - a = \frac{(x-a)f'(x) - f(x)}{f'(x)}$$

D'après la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 :
Il existe $z \in]a,x[$ (ou $]x,a[$) tel que :

$$0 = f(a) = f(x) + (a-x)f'(x) + \frac{(a-x)^2}{2} f''(z)$$

On en déduit :

$$F(x) - a = \frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(x)}(x-a)^2$$

Étape 2 :(question 2)
On pose $C = \dfrac{\max|f''|}{2\min f'}$. Ce dernier est bien défini car f'' et f' sont continues sur le segment $[c,d]$. On obtient $|F(x)-a| \leqslant C|x-a|^2$ pour $x \in [c,d]$. On choisit $\alpha > 0$ tel que $J = [a-\alpha, a+\alpha] \subset [c,d]$ et tel que $C\alpha < 1$.
Alors, si $x \in J$, $|F(x)-a| \leqslant C|x-a|^2 \leqslant C\alpha^2 < \alpha$.
Ainsi $F(J) \subset J$ i.e J est stable par F.
En prenant $x_0 \in J$ on a, pour tout n, $x_n \in J$ et $|x_{n+1}-a| \leq C|x_n-a|^2$.
D'où

$$C|x_n - a| \leqslant (C|x_0-a|)^{2^n} \leqslant \underbrace{(C\alpha)}_{<1}{}^{2^n}$$

donc la convergence est d'ordre 2.

Étape 3 :(question 3)
Pour $x \in [a,d]$, $f(x) \geq 0$ et $f' > 0$. Donc $F(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} \leq x$.
D'autre part, $f'' > 0$ et la preuve de 1., avec la formule de Taylor-Lagrange, montre que $F(x) - a \geq 0$ (toujours pour $x \in [a,d]$). Ainsi, l'intervalle $I = [a,d]$ est stable par F.
De plus, si $x_0 \in]a,d]$ la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. Si $x_0 = a$, la suite est stationnaire.
Sous les conditions de l'énoncé, la suite est donc décroissante, minorée par a, donc converge vers une limite l point fixe de F ie $F(l) = l$.
Donc $f(l) = 0$, d'où $l = a$. La convergence vers a est quadratique, comme précédemment.

Étape 4 :
Enfin, cette inégalité est essentiellement optimale.
De plus, si $x_0 > a$, on a pour tout n, $x_n > a$ et, comme dans la preuve précédente :

$$\frac{x_{n+1}-a}{(x_n-a)^2} = \frac{1}{2}\frac{f''(z_n)}{f'(x_n)}$$

avec $a < z_n < x_n$.
Comme $\dfrac{f''(z_n)}{f'(x_n)} \longrightarrow \dfrac{f''(a)}{f'(a)}$ (z_n est "coincé" donc converge + continuité de f' et f''), on obtient l'équivalent souhaité.

$\square$