FGN Analyse 1 p. 156

Developpement asymptotique de la serie Harmonique

<u>Theorème</u> : 1. $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

2. Soit $k_n = \min\{k \in \mathbb{N},\ H_k \geq n\}$. Alors $\lim_{n\to\infty} \frac{k_{n+1}}{k_n} = e$

<u>Démonstration</u>. 1. Soit $u_n = H_n - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$

· Montrons que ces suites sont adjacentes :

La difference $u_n - v_n = \frac{1}{n}$ est positive et converge vers 0.

La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante puisque :

$$u_n - u_{n+1} = -\frac{1}{n+1} - \ln(n) + \ln(n+1) = -\frac{1}{n+1} - \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \geq 0$$

en vertu de l'inegalité $\ln(1+x) \leq x$ pour $x > -1$.

D'autre part la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est croissante pour les mêmes raisons :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq 0$$

Les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont donc adjacentes et convergent vers une limite commune notée $\gamma > 0$ ($v_2 = 1 - \ln(2) > 0$)

· Trouvons le DA de H_n.

On a déjà montré que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$ pour $n \to \infty$.

- Posons $t_n = u_n - \gamma$, $n \geq 1$ et trouvons un equivalent de $t_n - t_{n-1}$

On a : $t_n - t_{n-1} = \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$

La serie telescopique $\sum t_n - t_{n-1}$, etant de même nature que la suite $(t_n)_{n\geq 1}$, elle converge. De l'équivalence etablie ci-dessus on en deduit que les restes des series $\sum t_n - t_{n-1}$ et $\sum \frac{-1}{2n^2}$ sont equivalents.

Ainsi : $\sum_{k=n+1}^{\infty} (t_k - t_{k-1}) = -t_n \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Il s'agit maintenant de trouver un equivalent au reste de la serie de Riemann : il s'obtient à l'aide d'une comparaison serie-integrale : Soit $\alpha > 1$, $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est decroissante et integrable sur $[1, +\infty[$ de sorte que pour $k \geq 2$:

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha}$$

En sommant l'inégalité entre $n+1$ et N puis en faisant $N \longrightarrow \infty$ on obtient

$$\int_n^\infty \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} 1/k^\alpha \leq \int_{n+1}^\infty \frac{dt}{t^\alpha}$$

Le membre de gauche et le membre de droite étant équivalents à $\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$, le théorème d'encadrement nous donne

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} 1/k^\alpha \sim \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}} \quad \circledast$$

$\circledast$ appliqué à $\alpha = 2$ nous donne : $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

- Posons $w_n = u_n - \gamma - \frac{1}{2n}$ pour $n \geq 1$, suite convergeant vers 0.

La somme $\sum_{k=n+1}^{\infty} w_k - w_{k-1}$ vaut $-w_n$ et son terme général s'écrit : $w_n - w_{n-1} = \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-2}$

pour $n \longrightarrow \infty$ on a :

$$w_n - w_{n-1} = \frac{-1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n}} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$= -\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$= -\frac{1}{3n^3} + \frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$= \frac{1}{6n^3} + o\,\frac{1}{n^3}$$

On conclut de la même manière que précédemment en appliquant $\circledast$ pour $\alpha = 3$. Ainsi $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{6k^3} \sim \frac{1}{12n^2} \sim -w_n$

D'où le DA : $H_n = \sum_{k\geq 1}^{n} 1/k = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

2. Pour estimer k_n, on utilise le début du DA de H_n $H_n = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n$ où $\varepsilon_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Par définition de k_n on a :

$$\ln(k_n) + \gamma + \varepsilon_{k_n} \geq n$$

$$\text{et} \quad \ln(k_n - 1) + \gamma + \varepsilon_{k_n - 1} < n$$

D'où en passant à l'exponentielle :

$$e^{e^{n-\gamma-\varepsilon_{k_n-1}}} + 1 > k_n \geq e^{e^{n-\gamma-\varepsilon_{k_n}}}$$

on a donc $\quad k_n \sim e^{e^{n-\gamma}}$ et $\lim\limits_{n\to e} \frac{k_{n+1}}{k_n} = e$ $\square$