Serie generatrice de nombres de Bernoulli et expression des $\zeta(2k)$

FGN
Analyse 2
p 308.

Theoreme : $\forall k \geq 1 \quad \zeta(2k) = (-1)^{k-1} \dfrac{(2\pi)^{2k}}{2.(2k)!} b_{2k}$ où b_k est le k-ieme nombre de Bernoulli.

Demonstration : Du developpement en serie de Fourier de $\varphi :]-\pi ; \pi[\to \mathbb{C} \; ; \; x \mapsto \exp\left(\frac{x z}{2\pi}\right)$, nous deduisons un DSE de $f : z \mapsto \dfrac{z}{e^z - 1}$.

1. φ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. On obtient pour $n \in \mathbb{Z}$.

$$c_n(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(\frac{x z}{2\pi} - i n x\right) dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\frac{z}{2\pi} - i n} \left[\exp\left(\frac{z}{2} - i n \pi\right) - \exp\left(-\frac{z}{2} + i n \pi\right)\right]$$

$$= \frac{(-1)^n}{z - 2i\pi n}\left(e^{z/2} - e^{-z/2}\right)$$

φ est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, le theoreme de Dirichlet dit que sa serie de Fourier converge en tout point de $\mathbb{R}$ vers $\frac{1}{2}(\varphi(x^+) + \varphi(x^-))$

Ainsi : $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(\varphi) e^{inx} = \frac{1}{2}(\varphi(x^+) + \varphi(x^-)) = \left(e^{z/2} - e^{-z/2}\right) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n e^{inx}}{z - 2i\pi n}$

on évalue cette egalité en $x = \pi$ pour obtenir :

$$\frac{1}{2}\left(e^{z/2} + e^{-z/2}\right) = \left(e^{z/2} - e^{-z/2}\right) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{z - 2i\pi n} = \left(e^{z/2} - e^{-z/2}\right) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{z + 2i\pi n}{z^2 + 4n^2\pi^2}$$

qui se récrit en : $\displaystyle \frac{e^{z/2} + e^{-z/2}}{2\left(e^{z/2} - e^{-z/2}\right)} = \frac{1}{2} + 2 \sum_{n \geq 1} \frac{z}{z^2 + 4\pi^2 n^2}$

Le premier membre s'ecrit : $\displaystyle \frac{e^{z/2} + e^{-z/2}}{2\left(e^{z/2} - e^{-z/2}\right)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^z + 1}{e^z - 1}$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{e^z - 1}$$

Soit en multipliant par z puis en soustrayant $\frac{z}{2}$ on a pour $z \in \mathbb{C} \setminus 2i\pi\mathbb{Z}$: $\displaystyle f(z) = 1 - \frac{z}{2} + 2 \sum_{n \geq 1} \frac{z^2}{z^2 + 4\pi^2 n^2}$.

2. <u>DSE de f</u> Nous allons DSE $\dfrac{z^2}{z^2 + 4\pi^2 n^2}$. Pour $|z| < 2\pi$ on a $\dfrac{|z|}{2\pi n} < 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, donc :

$$\frac{z^2}{z^2 + 4\pi^2 n^2} = \frac{z^2}{4\pi^2 n^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z^2}{4\pi^2 n^2}} = \frac{z^2}{4\pi^2 n^2} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(4\pi^2 n^2)^k}$$

$$= \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1} z^{2k}}{(2\pi n)^{2k}}$$

Considerons la serie double $\sum u_{n,k}$ avec $u_{n,k} = (-1)^{k+1} \frac{z^{2k}}{(2\pi n)^{2k}}$ $(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$

$\forall n \geq 1$ $\sum_k |u_{n,k}|$ cv et $\sum_k |u_{n,k}| = \sum_{k \geq 1} \frac{|z|^{2k}}{(2\pi n)^{2k}} = \frac{|z|^2}{4n^2\pi^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{|z|^2}{4n^2\pi^2}}$

$$= \frac{|z|^2}{4n^2\pi^2 - |z|^2}$$

La serie $\sum_{n \geq 1} \frac{|z|^2}{4n^2\pi^2 - |z|^2}$ cv. La serie double est donc sommable et on peut intervertir l'ordre de sommation pour avoir pour $|z| < 2\pi$ $z \neq 0$:

$$f(z) = 1 - \frac{z}{2} + 2 \sum_{n \geq 1} \sum_{k \geq 1} u_{n,k} = 1 - \frac{z}{2} + 2 \sum_{k \geq 1} \sum_{n \geq 1} u_{n,k}$$

$$\Rightarrow f(z) = 1 - \frac{z}{2} + 2 \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{(2\pi)^{2k}} \left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{2k}} \right) z^{2k}$$

Egalité verifiée pour $z = 0$, f admettant un prolongement par continuité en 0 par $f(0) = 1$.

<u>Application</u>: Les nombres de Bernouilli sont definis par $f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{b_n}{n!} z^n$. Par ce qui precède, $b_0 = 1$ $b_1 = -\frac{1}{2}$ $b_{2n+1} = 0$ $(n \geq 1)$ grâce à l'unicité des DSE.

En considérant $(e^z - 1) f(z) = z$, Un produit de Cauchy nous donne

$$\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n!} \cdot \sum_{k \geq 0}^{\infty} \frac{b_k}{k!} z^k = \sum_{n \geq 1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k!(n-k)!} z^k = z. \text{ D'où } \forall n \geq 2 \quad \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k!(n-k)!} = 0$$

ou alors : $\forall n \geq 2$ $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b_k = 0$ on en deduit alors $b_{n-1} = -\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} b_k$

Par recurrence immediate les $b_k \in \mathbb{Q}$ $k \geq 0$.

Du DSE on deduit pour $k \geq 1$

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{b_k}{k!} z^k = 1 - \frac{z}{2} + 2 \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{(2\pi)^{2k}} \cdot \zeta(2k) z^{2k}$$

D'où $\frac{b_{2k}}{(2k)!} = \frac{(-1)^{k+1}}{(2\pi)^{2k}} \zeta(2k) \Leftrightarrow \zeta(2k) = \frac{(-1)^{k+1}(2\pi)^{2k}}{(2k)!} b_{2k}$

La relation de recurrence nous donne $b_2 = \frac{1}{6}$ $b_4 = \frac{-1}{36}$.

D'où $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.