Nom : BIENAYME
Prenom : Pierre-Jules
n° leçon : 230

Ref : Gourdon, El-Amrani, Hauchecorne

Titre : Series de nombres reels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des series numeriques. Exemple

Cadre : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I Suites numériques et convergence

Def 1 : Soit $(u_n)_n$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. On appelle serie de terme general u_n la suite $(S_n)_n$ definie par :
$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, on note cet serie $\sum u_n$.
u_n s'appelle le terme d'indice n et S_n la somme partielle d'indice n.

Def 2 : On dit que la serie $\sum u_n$ converge si la suite (S_n) converge. Dans ce cas la limite S de la suite (S_n) s'appelle la somme de la serie $\sum u_n$, on la note $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$

Ex 3 : serie geometrique. $\sum a^n$ converge ssi $|a|<1$. Sa somme vaut $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$

Def 4 : Si $\sum u_n$ est une serie convergente, de somme S, le nombre $R_n = S - S_n$ est appellé le reste d'ordre n.

Rq 5 : R_n n'est defini que pour les series cv et $R_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Prop 6 : Si $\sum u_n$ cv, alors $u_n \to 0$

Rq 7 : La reciproque est fausse

Ctr-ex 8 : $u_n = \frac{1}{n} \to 0$ mais $\sum u_n$ dv.

Def 9 : On dit que $\sum u_n$ dv grossièrement si $u_n \not\to 0$

Ex 10 : Les series de terme general $u_n = \cos(n\alpha)$ et $v_n = \sin(n\alpha)$ dv grossièrement pour $\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$

Def 11 : On appelle serie telescopique associée à une suite $(a_n)_n$ la serie $\sum u_n$ où $u_n = a_n - a_{n}$,

Prop 12 : $\sum u_n$ et (a_n) ont même nature et $\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \lim_{n\to\infty} a_n - a_0$ en cas de cv

Ex 13 : $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

Thm 14 : Critère de Cauchy
Un serie numerique $\sum u_n$ cv ssi elle satisfait le critère de Cauchy :
$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| \leq \varepsilon$

Rq 15 : Le critère de Cauchy n'est valable que si $(u_n)_n$ est à valeur dans un espace complet

Ctr-ex 16 : $u_n = \frac{1}{n!} \in \mathbb{Q}$ $\sum u_n \to e \notin \mathbb{Q}$

Def 17 : Absolue convergence : $\sum u_n$ converge absolument si $\sum |u_n|$ cv.

Thm 18 : absolue cv $\Rightarrow$ cv

Ctr-ex 19 : la reciproque est fausse : $u_{2p} = -\frac{1}{p}$ $u_{2p+1} = \frac{1}{p}$

Def 20 : Une serie qui cv ~~absolument~~ mais non absolument est dite semi convergente.

Ex 21 : $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

II Serie à termes positifs

Lemme 22 : Une serie à termes positifs cv ssi la suite (S_n) est majorée.

Thm 23 : Regle de Comparaison :
Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$ de series à termes ≥ 0 telles que $u_n \leq v_n$ $\forall n \geq 0$. Alors
1) $\sum v_n$ cv $\Rightarrow$ $\sum u_n$ cv et $\sum_{n\geq 0} u_n \leq \sum_{n \geq 0} v_n$
2) $\sum u_n$ dv $\Rightarrow$ $\sum v_n$ dv

Ex 24 : 1) $u_n = \frac{1}{n^2}$ $v_n = \frac{1}{n(n+1)}$
2) $u_n = \frac{1}{n}$ $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

Ctr-ex 25 : $u_n = \frac{1}{n+1}$ $v_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, on a $|u_n| \leq |v_n|$ mais $\sum u_n$ dv et $\sum v_n$ cv

Thm 26 : Règle d'équivalence
Soient $\sum u_n, \sum v_n$ des séries à termes ≥ 0 telles que $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$. Alors
1) $\sum u_n$, $\sum v_n$ sont de même nature
2) En cas de cv, les restes sont de même nature
3) En cas de dv, les sommes partielle sont de m̂ nature

ctrex 27 : 1) $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ $\quad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ $\quad \sum u_n$ dv $\sum v_n$ cv
2) $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $\quad v_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n\sqrt{n}}$
3) $u_n = (-1)^n$ $\quad v_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$

Thm 28 : Série de Riemann
$u_n = \frac{1}{n^\alpha}$, $\quad \sum u_n$ cv ssi $\alpha > 1$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}$

Thm 29 : Règle de domination
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes ≥ 0 telles que $u_n = \underset{n\to\infty}{O}(v_n)$. Si $\sum v_n$ cv, $\sum u_n$ cv et $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ et $\rho_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k$ vérifient $R_n = \underset{n\to\infty}{O}(\rho_n)$

~~ctrex 30~~

Thm 30 : Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes ≥ 0 tq $u_n = \underset{\infty}{o}(v_n)$. Si $\sum v_n$ cv alors $\sum u_n$ cv et $R_n = \underset{\infty}{o}(\rho_n)$

Ctrex 31 : $u_n = \frac{1}{n}$, $v_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ on a $|u_n| = \underset{\infty}{o}(|v_n|)$ mais $\sum v_n$ cv et $\sum u_n$ dv.

Thm 32 : Comparaison série intégrale
Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction ≥ 0 et $\searrow$. Alors la série $\sum f(n)$ $(n \geq a)$ et l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ sont de même nature. En cas de cv on a l'encadrement :
$$\int_{n+1}^{\infty} f(t)\,dt \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} f(t)\,dt$$

DEV 1

Appli 33 : Dvt asymptotique de la série harmonique
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on note $H_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$. Le développement asymptotique de H_n est donné par :
$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o(1/n^2)$ $\quad \gamma \geq 0$

prop 34 : Série de Bertrand
$\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ cv ssi $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$)

III Séries à terme général.

Thm 35 : Règle de Cauchy
Soit $\sum u_n$ une série avec $u_n \in \mathbb{K}$ $\forall n$, et soit $L = \lim_{n\to\infty} |u_n|^{1/n}$ ($L = \infty$ éventuellement) alors
1) $L < 1 \Rightarrow \sum u_n$ cv abs
2) $L > 1 \Rightarrow \sum u_n$ dv

Ex 36 : $\sum \left(\frac{4n+1}{3n+1}\right)^n$ dv, $\sum \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ cv

Thm 37 : Règle de d'Alembert
Soit $\sum u_n$ une série à valeurs dans $\mathbb{K}$ non nuls APCR.
Si $\lim \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lambda$ existe, alors :
1) $\lambda < 1 \Rightarrow \sum u_n$ cv abs
2) $\lambda > 1 \Rightarrow \sum u_n$ dv

Ex 38 : $\sum \frac{a^n}{n}$ cv pour $a < 1$, dv pour $a \geq 1$

Def 39 : On appelle série alternée toute série de terme général $(-1)^n a_n$ où a_n est de signe constant

Thm 40 Critère de Leibniz
Soit (a_n) une suite à terme ≥ 0 décroissante tendant vers 0. alors $\sum (-1)^n a_n$ cv. De plus sa somme S vérifie $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$ $\forall n$, et son reste vérifie $|R_n| \leq a_{n+1}$

Ex 41 : $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*$ la serie $\sum (-1)^{n-1} n^{-\alpha}$ cv.

prop 42 : Transformation d'Abel

Soit $\sum u_n$, $u_n = \alpha_n v_n$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ on a

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k v_k = \alpha_0 v_0 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k (S_k - S_{k-1}))$$

$$= \alpha_0 v_0 + \sum_{n=1}^{k=1} \alpha_k S_k - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k S_k$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) S_k + \alpha_n S_n$$

Thm 43 : Critère d'Abel.

Soit $\sum u_n$ tq $u_n = a_n b_n$. On sa

1) $(a_n) > 0$ et $(a_n) \searrow 0$

2) $b_n \in \mathbb{K}$ et $\exists M > 0$ tq $\forall n \geq 0$, $\forall m \geq n$ $|b_n + \dots + b_m| \leq M$

Alors $\sum u_n$ cv et $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $|R_n| \leq M a_{n+1}$

Def 44 : On definit le serie produit de $\sum u_n$ et $\sum v_n$ par $\sum w_n$ avec $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$

Ex 45 : $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ $v_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n+2)}$ $\sum u_n$ et $\sum v_n$ cv mais $\sum w_n$ dv. $w_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \frac{1}{\ln(n-k+2)}$

Thm 46 : Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$ deux series cv. de somme S et T respectivement. Si une des deux serie est ACV alors $\sum w_n$ cv et $\sum w_n = ST$. si les deux series sont ACV, alors $\sum w_n$ ACV.

IV Series entières, series de Fourier.

~~Thm~~ **Def 47** On appelle serie entière toute serie de fonction $\sum f_n$ dans laquelle f_n est une fonction $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de la forme $x \mapsto a_n x^n$ où $(a_n) \in \mathbb{C}$. On note $\sum a_n z^n$ une telle suite.

Def 48 : Soit f une fct complexe definie sur une partie X de $\mathbb{C}$. On dit que f est developpable en serie entière en 0 s'il existe une serie entière $\sum a_n z^n$ de rayon de CV $R > 0$ et $r \in]0, R]$ avec $D(0, r) \subset X$ tq $\forall z \in D(0,r)$ $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$

Thm 49 : Formule de Parseval

Pour toute fonction f, 2π-periodique et C^1 par morceaux sur $[0, 2\pi]$, on a $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$.

Thm 50 : Dirichlet.

Soit f 2π-periodique de classe C^n par morceaux sur $[0, 2\pi]$ Alors la serie de Fourier CVS et sa somme en t est $\frac{f(t^+) - f(t^-)}{2}$

~~Thm 51 : Soit~~

DEV2

App 51 : Expression de $\zeta(2k)$

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\zeta(2k) = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2 \cdot (2k)!} b_{2k} \in \pi^{2k} \mathbb{Q}$

où b_n est le n-ième nombre de bernoulli