Leçon 239
Trinôme K

Développement
Transformation de Fourier :
Inversion dans $L^1(\mathbb{R})$
et
Transformée de Fourier-Plancherel

On rappelle que l'on définit la transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$ par :

$$\mathcal{F} \left| \begin{array}{ccc} L^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0_b(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & \hat{f} \end{array} \right.$$

où $\forall \xi \in \mathbb{R},\ \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-it\xi} dt$

<u>Lemme préliminaire</u>: Soit la gaussienne

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & (0,+\infty) \\ t & \longmapsto & e^{-\frac{t^2}{2}} \end{array} \right. , \text{ alors :}$$

(i) $\forall \xi \in \mathbb{R}, \ \hat{g}(\xi) = \sqrt{2\pi}\, g(\xi)$

(ii) La suite $(g_s)_{s>0}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ g_s(t) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}}\, g\left(\frac{t}{s}\right)$$

est une approximation de l'unité.

<u>Preuve du lemme</u>

(i) Premièrement, on vérifie que l'on peut dériver sous l'intégrale suivant la variable ξ. En effet.

(a) $\forall \xi \in \mathbb{R}, \ \left| e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-it\cdot\xi} \right| = e^{-\frac{t^2}{2}} \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

(b) $\forall t \in \mathbb{R}$, $\xi \longmapsto e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-it\cdot\xi}$ est dérivable de

dérivée $\xi \longmapsto (-it)\, e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-it\cdot\xi}$

(c) On a $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\left|\frac{d}{d\xi}\hat{g}(\xi)\right| \leqslant t\, e^{-\frac{t^2}{2}} \in L^1(\mathbb{R})$

Donc : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\displaystyle \frac{d}{d\xi}\hat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} (-it)\, e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-it\cdot\xi}\, dt$

Soit l'intégrale : $\forall (A, B) \in (0, +\infty)^2$,

$$\int_{-A}^{B} (-it)\, e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-it\cdot\xi}\, dt = \left[e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot i\, e^{-it\xi} \right]_{-A}^{B} - \xi \int_{-A}^{B} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-it\cdot\xi}\, dt$$

Où l'on a effectué une intégration par parties. En faisant tendre A et B vers $+\infty$, il vient :

$$\frac{d}{d\xi}\hat{g}(\xi) = -\xi\,\hat{g}(\xi)$$

De plus, on a : $\hat{g}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \sqrt{2\pi}$

On a donc le problème de Cauchy.

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\xi}\hat{g}(\xi) = -\xi\,\hat{g}(\xi) \\ \hat{g}(0) = \sqrt{2\pi} \end{cases}$$

De solution unique : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{g}(\xi) = \sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{\xi^2}{2}}$

$\iff \forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{g}(\xi) = \sqrt{2\pi}\; g(\xi)$.

(ii) On a : (a) $\forall t \in \mathbb{R}$, $g_s(t) > 0$, $\forall s > 0$

(b) $\forall (A,B) \in (0,+\infty)^2$, $\displaystyle\int_{-A}^{B} g_s(t)\,dt = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{B} e^{-\frac{t^2}{2s^2}}\,dt$

$$\Leftrightarrow \int_{-A}^{B} g_s(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{A}{s}}^{\frac{B}{s}} e^{-\frac{\eta^2}{2}}\,d\eta \underset{\substack{A\to\infty \\ B\to\infty}}{\longrightarrow} 1$$

où l'on a effectué le changement de variable

$$\phi^{-1}(t) = \frac{t}{s} \Leftrightarrow \phi(\eta) = s\eta \Rightarrow \phi'(\eta) = s$$

(c) $\forall (s,K) > 0,\ \displaystyle\int_{s<|t|<K} g_s(t)\,dt = 2\int_{s}^{K} g_s(t)\,dt$

(Par parité) Soit :

$$\int_{s'<|t|<K} g_s(t)\,dt = \frac{2}{s\sqrt{2\pi}} \int_{s'}^{K} e^{-\frac{t^2}{2s^2}}\,dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{s'}{s}}^{\frac{K}{s}} e^{-\frac{\eta^2}{2}}\,d\eta$$

$$\Rightarrow \int_{s'<|t|<K} g_s(t)\,dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{s'}{s}}^{\frac{K}{s}} e^{-\frac{\eta^2}{2}}\,d\eta < \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{\eta^2}{2}}\,d\eta = 1$$

Ensuite, on a que la fonction $\eta \longmapsto e^{-\frac{\eta^2}{2}}$ est décroissante soit :

$$\int_{\delta' < |t| < K} g_\delta(t)\,dt \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{K - \delta'}{\delta}\right) e^{-\frac{(\delta')^2}{2\delta^2}} \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0$$

D'où le lemme $\square$

<u>Théorème</u> (inversion de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$)

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Alors : p.p. $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{it\xi}\,d\xi$

<u>Preuve du théorème</u> : Soit :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ I_\delta(t) := \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\, e^{it\cdot\xi}\, g(\delta\xi)\,d\xi$$

$$\Leftrightarrow I_\delta(t) = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi\cdot x}\,dx\right) e^{it\cdot\xi}\, g(\delta\xi)\,d\xi$$

Par le théorème de Fubini, il vient :

$$I_S(t) = \int_{\mathbb{R}} \rho(x) \left(\int_{\mathbb{R}} g(S\xi) e^{-i(x-t)\xi} d\xi \right) dx$$

Par le changement de variable :

$$\phi^{-1}(\xi) = S\xi \iff \phi(\eta) = \frac{\eta}{S} \Rightarrow \phi'(\eta) = \frac{1}{S}$$

On obtient :

$$I_S(t) = \int_{\mathbb{R}} \rho(x) \cdot \frac{1}{S} \hat{g}\left(\frac{x-t}{S}\right) dx$$

Par le lemme, (i)

$$I_S(t) = \sqrt{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \rho(x) \cdot \frac{1}{S} g\left(\frac{x-t}{S}\right) dx$$

et par le lemme, (ii)

$$I_S(t) = 2\pi \int_{\mathbb{R}} \rho(x) \cdot g_S(x-t) dx = 2\pi (\rho * g_S)(t)$$

On a donc $I_\delta \xrightarrow[\delta \to 0]{L^1} 2\pi \cdot f$, soit, quitte à extraire : $I_\delta \xrightarrow[\delta \to 0]{p.p.} 2\pi f$

Par convergence dominée, on a également que : $I_\delta(t) \xrightarrow[\delta \to 0]{p.p.} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{it\xi} d\xi$

D'où : p.p. $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{it \cdot \xi} d\xi$ □

<u>Théorème</u> (Transformation de Fourier-Plancherel)

La transformation de Fourier

$$\mathcal{F} : \left| \begin{array}{ccc} L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) & \to & \mathcal{C}^0_b(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \\ f & \longmapsto & \hat{f} \end{array} \right.$$

se prolonge de manière unique en une application $\tilde{\mathcal{F}} : L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

vérifiant : $\forall f \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $\|\tilde{\mathcal{F}}(f)\|_{L^2} = \sqrt{2\pi}\,\|f\|_{L^2}$.

<u>Preuve</u> : En premier lieu, observons que si $f \in \mathcal{C}^2_c(\mathbb{R},\mathbb{C})$, alors $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$. En effet, on a :

$$f \in \mathcal{C}^2_c(\mathbb{R},\mathbb{C}) \Rightarrow f'' \in \mathcal{C}^0_b(\mathbb{R},\mathbb{C})$$

Et : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{f''}(\xi) = (i\xi)^2 \hat{f}(\xi)$

D'où : $|\hat{f}(\xi)| \leqslant \|f\|_{L^1}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$

Et : $\forall \xi \in (\mathbb{R}\setminus\{0\})$, $|\hat{f}(\xi)| \leqslant \dfrac{\|f''\|_{L^1}}{|\xi|^2}$

Donc : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $|\hat{f}(\xi)| \leqslant \min\left(\|f\|_{L^1}, \dfrac{\|f''\|_{L^1}}{|\xi|^2}\right)$

$$\Leftrightarrow \quad |\hat{f}(\xi)| \leqslant \varphi(\xi) = \begin{cases} \|f\|_{L^1}, & \text{si } |\xi| \leqslant \sqrt{\dfrac{\|f''\|_{L^1}}{\|f\|_{L^1}}} \\ \dfrac{\|f''\|_{L^1}}{|\xi|^2}, & \text{sinon} \end{cases}$$

et $\varphi \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$

Ensuite, montrons que $\mathcal{F}$ réalise une application $(\sqrt{2\pi})$-Lipschitzienne de $(C_c^2(\mathbb{R},\mathbb{C}), \|\cdot\|_{L^2})$ dans $(L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}), \|\cdot\|_{L^2})$. On a

$$\|\hat{\rho}\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} \hat{\rho}(\xi)\,\overline{\hat{\rho}(\xi)}\,d\xi$$

Qui est bien défini car positif.

Ensuite : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\overline{\int_{\mathbb{R}} \rho(t) e^{-it\cdot\xi}\,dt} = \int_{\mathbb{R}} \overline{\rho(t)}\, e^{it\cdot\xi}\,dt$

D'où, par le théorème de Fubini :

$$\|\hat{\rho}\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} \overline{\rho(x)} \left(\int_{\mathbb{R}} \hat{\rho}(\xi)\, e^{it\cdot\xi}\,d\xi \right) dx$$

Et, par la formule d'inversion $L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

$$\|\hat{\rho}\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} \overline{\rho(x)}\; 2\pi\, \rho(x)\,dx = 2\pi \|\rho\|_{L^2}^2$$

Ainsi, $\mathcal{F} : (C^2_c(\mathbb{R},\mathbb{C}), \|\ \|_{L^2}) \to (L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}), \|\cdot\|_{L^2})$ est $(\sqrt{2\pi})$-Lipschitzienne, donc en particulier elle est uniformément continue.

Ensuite, $(C^2_c(\mathbb{R},\mathbb{C}), \|\cdot\|_{L^2})$ est dense dans $(L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}), \|\ \|_{L^2})$. Il existe donc un unique prolongement par densité de $\mathcal{F}$ à $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ tout entier, noté $\hat{\mathcal{F}}$.

Il reste à montrer que $\hat{\mathcal{F}}$ et $\mathcal{F}$ coïncident sur $L^1(\mathbb{R},\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

La suite de fonctions $(f * g_s)_{s>0}$ converge vers f dans L^1 et dans L^2. De plus elle est clairement C^2.

Soit $(\chi_s)_{s>0}$ la suite de fonctions plateaux définie par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\chi_s(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in \left[-\frac{1}{s}, \frac{1}{s}\right] \\ 0 \text{ si } |t| \geq \frac{2}{s} \end{cases}$

(On a par définition $\chi_s \in C_c^\infty$). Alors la suite de fonctions $(f_s)_{s>0}$ définie par :

$$f_s = \chi_s \cdot (f * g_s)$$

est une fonction $C_c^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ qui converge vers f dans L^1 et dans L^2. En effet, soit $p \in \{1, 2\}$, alors :

$$\|f - f_s\|_{L^p} \leq \|\chi_s \cdot (f - f * g_s)\|_{L^p} + \|(1 - \chi_s) f\|_{L^p}$$

Le premier terme du second membre tend vers zéro car $f * g_s \xrightarrow[s \to 0]{L^p} f$, et le second membre tend vers zéro par convergence dominée.

Ensuite, par continuité de $\hat{\mathcal{F}}$, on a que :

$$\hat{\mathcal{F}}(\rho_\delta) \xrightarrow[\delta \to 0]{L^2} \hat{\mathcal{F}}(\rho)$$

Soit, quitte à extraire, on a :

$$\hat{\mathcal{F}}(\rho_\delta) \xrightarrow[\delta \to 0]{p.p.} \hat{\mathcal{F}}(\rho)$$

Puisque $\rho_\delta \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on a :

$$\hat{\mathcal{F}}(\rho_\delta) = \widehat{\rho_\delta} \xrightarrow[\delta \to 0]{p.p.} \hat{\rho}$$

D'où : $\hat{\mathcal{F}}(\rho) = \hat{\rho}$, p.p.

Dès que $\rho \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

$\square$