Timoine K Leçon 239

Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre, exemples et applications

I - Définition et exemples

Dans toute la leçon, nous supposons $\mathbb{R}^N$ en temps qu'espace mesuré muni de la mesure de Lebesgue et $\mathbb{C}$ muni de la métrique induite par la norme euclidienne usuelle. À cet effet, nous nous plaçons dans le cadre de la théorie de l'intégration de Lebesgue

Définition 1 (Intégrale dépendant d'un paramètre) Soient $\omega \subset \mathbb{C}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ des ouverts ($N \geq 1$), et une fonction

$$f \left| \begin{array}{l} \omega \times \Omega \to \mathbb{C} \\ (z, x) \mapsto f(z, x) \end{array} \right.$$

mesurable pour sa seconde variable. On définit l'intégrale de paramètre $z \in \omega$ associée à f par : $F \left| \begin{array}{l} \omega \to \overline{\mathbb{C}} \\ z \mapsto \int_\Omega f(z,x)\,dx \end{array} \right.$

Exemples · La fonction Γ d'Euler définie par $\Gamma : \left| \begin{array}{l} \omega \to \overline{\mathbb{C}} \\ z \mapsto \int_{\mathbb{R}_+} t^{z-1} e^{-t}\,dt \end{array} \right.$

où $\omega = \{z \in \mathbb{C} / \mathrm{Re}(z) > 0\}$

· Si $f \in C^{k+1}(U, \mathbb{R})$ où $U \subset \mathbb{R}$ est ouvert, la fonction $t \mapsto \int_a^h \frac{(h-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,dt$

$t \in [a,b] \subset U$

· Les intégrales indéfinies

· (Potentiel de Riesz) Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et $\alpha \in (0,1)$, la fonction :

$$I_\alpha f : t \mapsto \frac{\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}{2^\alpha \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\eta)}{|t-\eta|^{1-\alpha}}\,d\eta$$

II - Régularité d'une intégrale dépendant d'un paramètre

Rappelons le théorème de Lebesgue fondamental pour la suite :

Théorème 1 (Convergence dominée) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^1(\mathbb{R}^N)$ vérifiant :

(C1) $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CVS} f$ p-p.

(C2) $\exists g \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, p.p $x \in \mathbb{R}^N$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.

Alors on a :

(i) $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$

(ii) $\|f_n - f\|_{L^1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Théorème 2 (Continuité sous l'intégration) (1) Soit f vérifiant les conditions de la définition 1. On suppose de plus que :

(i) Pour presque tout $x \in \Omega$, l'application $z \mapsto f(z,x)$ est continue en un point $z_0 \in \omega$

(ii) Il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ positive, indépendante de la variable z, telle que :

$$|f(z,x)| \leq g(x) \quad \forall z \in \omega,\ \text{p.p. } x \in \Omega$$

Alors l'intégrale de paramètre $z \in \omega$ associée à f, notée F, est continue au point $z_0 \in \omega$.

Théorème 3 (Dérivabilité sous l'intégration) Soit $f : I \times \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction vérifiant les conditions de la définition 1, où l'on considère ici un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$. On suppose :

(C1) Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(t,x)$ est dans $L^1(\Omega)$

(C2) Pour presque tout $x \in \Omega$, l'application $t \mapsto f(t,x)$ est dérivable sur I

(C3) Pour tout compact $K \subset I$, il existe une fonction $g_K \in L^1(\Omega)$ positive indépendante de la variable t, telle que :

$$|\partial_t f(t,x)| \leq g_K(x) \quad \forall t \in K,\ \text{p.p. } x \in \Omega$$

Alors

(i) Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto \partial_t f(t,x)$ est dans $L^1(\Omega)$

(ii) L'intégrale de paramètre $t \in I$ associée à f, notée F, est dérivable sur I et :

$$\frac{d}{dt} F(t) = \int_\Omega \partial_t f(t,x)\,dx \quad \forall t \in I$$

[E]xemple. La fonction $F : \begin{cases} [0,+\infty) \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \displaystyle\int_{[0,1]} \frac{e^{-t^2(y^2+1)}}{y^2+1}\,dy \end{cases}$

[es]t dérivable de dérivée $F'(t) = -2te^{-t^2}\displaystyle\int_{[0,1]} e^{-t^2y^2}\,dy$ sur $[0,+\infty)$.

[R]emarque : On obtient un analogue à ce [t]héorème pour le cas C^k ($k\in\mathbb{N}$) en combinant [le]s théorèmes 2 et 3 et en procédant par [r]écurrence.

Théorème 4 (Holomorphie sous l'intégrale) [So]it $f : \omega\times\Omega \to \mathbb{C}$ une fonction vérifiant les [c]onditions de la définition 1. On suppose :

(1) Pour tout $z\in\omega$, $(x \mapsto f(z,x))$ est dans $L^1(\Omega)$

(2) Pour presque tout $x\in\Omega$, $(z \mapsto f(z,x))$ est holomorphe sur ω.

(3) Pour tout compact $K\subset\omega$, il existe $g_K \in L^1(\Omega)$ positive et indépendante de z telle que : $|f(z,x)| \leq g_K(x)$ $\forall z\in K$, p.p. $x\in\Omega$

[A]lors l'intégrale de paramètre $z\in\omega$ associée [à] f, notée F, est holomorphe sur ω et :

$$\frac{d}{dz}F(z) = \int_\Omega \partial_z f(z,x)\,dx, \quad \forall z\in\omega$$ ■

Exemple: La fonction Γ est holomorphe et vérifie : $\forall z\in\{z\in\mathbb{C} / \mathrm{Re}(z)>0\}$,

$$\Gamma'(z) = \int_{\mathbb{R}_+} \log(t)\, t^{z-1} e^{-t}\,dt$$

III - Le produit de convolution

Dans cette partie, nous supposerons pour simplifier que $\omega = \Omega = \mathbb{R}$. Néanmoins les résultats sont valables dans un cadre plus général.

Définition 2 (Produit de convolution de deux fonctions) On dit que deux fonctions boréliennes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sont convolables si la fonction $f*g$ donnée par : $\forall x\in\mathbb{R}$, $(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\,g(t)\,dt$ est bien définie ■

Proposition 1 (Propriétés élémentaires) Soient $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, et $h:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ trois fonctions boréliennes. Alors : (i) $(f*g)$ est partout bien définie et borélienne. (ii) (Commutativité) $f*g = g*f$ (iii) $\forall\lambda\in\mathbb{C}$, $f*(\lambda g+h) = \lambda(f*g)+h$. ■

Dans la pratique nous considérerons des fonctions L^p, $p\geq 1$. On a alors :

Proposition 2 (Inégalité de Young) Soit un triplet $(p,q,r)\in[1,+\infty]^3$ vérifiant $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1+\frac{1}{r}$, avec la convention $\frac{1}{\infty} = 0$. Alors si $f\in L^p(\mathbb{R})$ et $g\in L^q(\mathbb{R})$, f et g sont convolables, leur convolée est dans $L^r(\mathbb{R})$ et on a l'inégalité : $\|f*g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}\cdot\|g\|_{L^q}$ ■

Proposition 3 (Continuité $C^0_c * L^1_{loc}$) Pour toutes fonctions $\phi\in C^0_c(\mathbb{R})$ et $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, $(\phi*f)$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$. ■

Proposition 4 (Régularité $C^\infty_c * L^1_{loc}$) Pour toute fonction $\phi\in C^\infty_c(\mathbb{R})$ et $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, $(\phi*f)\in C^\infty(\mathbb{R})$ et on a $\forall j\in\mathbb{N}$, $\partial^j(\phi*f) = (\partial^j\phi)*f$ ■

Remarque. On a un résultat analogue pour $\phi\in C^k_c(\mathbb{R})$, où k est un entier fixé et alors $(\phi*f)\in C^k(\mathbb{R})$.

Définition 3 (Approximation de l'unité) On appelle approximation de l'unité une famille de fonctions boréliennes $(\rho_\varepsilon)_{0<\varepsilon<\delta}$ définies sur $\mathbb{R}$ et vérifiant les propriétés suivantes pour tout $\varepsilon\in(0,\delta)$: (i) $\rho_\varepsilon \geq 0$, (ii) $\int_{\mathbb{R}}\rho_\varepsilon(t)\,dt = 1$, (iii) $\forall\alpha>0$, $\int_{\alpha<|t|}\rho_\varepsilon(t) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$.

Si, de plus, $(\rho_\varepsilon)_{0<\varepsilon<\delta}$ vérifie : (iv) $\rho_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$, (v) $\mathrm{supp}(\rho_\varepsilon)\subset[-r_\varepsilon, r_\varepsilon]$, où $r_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$

On dit que $(\rho_\varepsilon)_{0<\varepsilon<\delta}$ est une suite régularisante. ■

Remarque: La suite $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ définie par : $\rho_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\phi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$ où $\phi : \begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ t\mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-t^2}}, & t\in(-1,1) \\ 0, & \text{sinon}\end{cases}\end{cases}$

est une suite régularisante

Proposition 5 (Densité de $C^\infty_c(\mathbb{R})$ dans $C^0_c(\mathbb{R})$) Soit $f\in C^0_c(\mathbb{R})$ et $(\rho_\varepsilon)_{0<\varepsilon<\delta}$ une suite régularisante. Alors : (i) $(\rho_\varepsilon*f)\in C^\infty_c(\mathbb{R})$ (ii) $\rho_\varepsilon*f \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{cvu} f$ ■

Proposition 6 (Densité de $C^\infty_c(\mathbb{R})$ dans $L^p(\mathbb{R})$) Soit $f\in L^p(\mathbb{R})$ ($p\geq 1$). Alors

(i) Pour toute approximation de l'unité $(\rho_\varepsilon)_{0<\varepsilon<\delta}$ on a : $\|f-\rho_\varepsilon*f\|_{L^p} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$

(ii) $\forall\eta>0$, $\exists f_\eta\in C^\infty_c(\mathbb{R})$, $\|f-f_\eta\|_{L^p}\leq\eta$ ■

Remarque : Le point (ii) de la proposition 5 est valable pour toute approximation de l'unité.

I - Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction borélienne, on définit lorsque cela a un sens sa transformée de Fourier par
$$\hat{f} \,\Big|\, \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{C}} \\ \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx \end{array}$$

Dès lors que $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a, $\|\hat{f}\|_{\infty} \leq \|f\|_{L^1}$, ce qui motive la définition suivante

Définition 4 (Transformation de Fourier $L^1(\mathbb{R})$) On appelle transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ l'application : $\hat{} : \Big| \begin{array}{l} L^1(\mathbb{R}) \to C_b^0(\mathbb{R}) \\ f \mapsto \hat{f} \end{array}$ ∎

Remarque : Pour justifier pleinement cette définition, il nous faut encore montrer que la transformée de Fourier d'une fonction L^1 est continue.

Proposition 7 Soit $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, alors $\hat{f}$ $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est continue et bornée ∎

Théorème 6 (Inversion) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, alors
$$\text{p.p. } x \in \mathbb{R}, \; f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$ ∎

Proposition 8 (Transformation de Fourier et convolution) Soient f et g deux fonctions de $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, alors :

(i) $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$

(ii) Si $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $\hat{f} * \hat{g} = (2\pi) \widehat{fg}$ ∎

Proposition 9 (Riemann-Lebesgue) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, alors : $\hat{f}(\xi) \underset{|\xi| \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ ∎

Proposition 10 (Transformation de Fourier et régularité) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Alors.

(i) Si $f \in C^k(\mathbb{R})$ et $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, alors
$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \; \widehat{f^{(k)}}(\xi) = (i\xi)^k \hat{f}(\xi)$$

(ii) Si $(\phi : x \mapsto x f(x)) \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{f}$ est dérivable de dérivée continue et bornée donnée par : $\forall \xi \in \mathbb{R}$ $\frac{d}{d\xi} \hat{f}(\xi) = -i \hat{\phi}(\xi)$ ∎

Exemple : (Fonctions caractéristiques) Si X est une variable aléatoire de densité f_X, sa fonction caractéristique ϕ_X est donnée par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\phi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} f_X(s) e^{-its} ds$

Remarque : On peut définir une transformation de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, dite de Fourier-Plancherel, à partir de la théorie L^1.

V - Transformation de Fourier dans $S(\mathbb{R})$

Définition 5 (Espace de Schwartz) On appelle espace de Schwartz que l'on note $S(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions lisses à décroissance rapide ayant toutes leurs dérivées à décroissance rapide, c'est-à-dire :
$$(f \in S(\mathbb{R})) \Leftrightarrow \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| t^{\alpha} \frac{d^{\beta}}{dt^{\beta}} f(t) \right| < +\infty\right), \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$$ ∎

Proposition 11 (Propriétés des fonctions à décroissance rapide) Soit f une fonction à décroissance rapide c'est-à-dire vérifiant : $|t^{\alpha} f(t)| \underset{|t| \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}$

Alors (i) Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, $(Id^q f) \in L^1(\mathbb{R}) \; \forall q \in \mathbb{N}$

(ii) Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\hat{f} \in C^{\infty}(\mathbb{R})$

(iii) Si $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ et si pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, $f^{(\alpha)} \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}$ est à décroissance rapide ∎

Remarque. On a $S(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ donc on peut utiliser la théorie L^1 pour définir la transformation de Fourier sur $S(\mathbb{R})$

Proposition 12 (Propriétés de la transformée de Fourier sur $S(\mathbb{R})$) Soit $f \in S(\mathbb{R})$, alors :

(i) $f \in L^1(\mathbb{R})$ (ii) $\hat{f} \in S(\mathbb{R})$

(iii) $\hat{} : S(\mathbb{R}) \to S(\mathbb{R})$ est linéaire, bijective, et bicontinue ∎

Exemple d'application : Le problème de Cauchy 1D :
$$\begin{cases} \partial_t u = i \Delta_x u \\ u_{|t=0} = f, \text{ où } f \in S(\mathbb{R}) \end{cases}$$

admet une solution dans $L^{\infty}_{loc,t}(S_x(\mathbb{R}))$, et elle est unique.