Théorème d'Abel angulaire et tauberien faible

Leçons : 207, 230, 235, 241, 243

Référence : Gourdon analyse

> **Théorème 1** *(Abel angulaire)*
> *Soit* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *est une série entière de rayon de convergence supérieure ou égale à* 1 *telle que* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *converge. Soit* $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
> *On pose :* $\Delta_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \textit{ et } \exists \rho > 0,\ \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0] \textit{ tel que } z = 1 - \rho e^{i\theta}\}$
> *On note* $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. *Alors* $\lim\limits_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Preuve :

• **Étape 1 :** Étude de $\left| f(z) - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right|$.

Soient $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$ et $R_N = S - S_N$, pour $N \in \mathbb{N}$.
Soit $z \in \mathbb{C}^*$, avec $|z| < 1$ et $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} a_n z^n - S_N &= \sum_{n=1}^{N} (R_{n-1} - R_n)(z^n - 1) + a_0 - a_0 \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} R_n(z^{n+1} - 1) - \sum_{n=1}^{N} R_n(z^n - 1) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} R_n(z^{n+1} - z^n) - R_N(z^N - 1) \\
&= (z-1) \sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n - R_N(z^N - 1)
\end{aligned}$$

Donc par passage à la limite, $N \to +\infty$ on obtient :

$$f(z) - S = (z-1) \sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N$, $|R_n| < \varepsilon$. Alors pour $|z| < 1$ on a :

$$\begin{aligned}
|f(z) - S| &\leq |z-1| \left| \sum_{n=0}^{N} R_n z^n \right| + |z-1|\varepsilon \sum_{n=N+1}^{+\infty} |z|^n \\
&\leq |z-1| \sum_{n=0}^{N} |R_n| + \varepsilon \frac{|z-1|}{1-|z|}
\end{aligned}$$

• **Étape 2 :** Majoration des deux termes.
Soit $z = 1 - \rho e^{i\varphi} \in \Delta_{\theta_0}$ où $\rho > 0$ et $|\varphi| \leq \theta_0$.
Alors $|z|^2 = (1 - \rho e^{i\varphi})(1 - \rho e^{-i\varphi}) = 1 - 2\rho cos(\varphi) + \rho^2$. Quand $z \to 1$, $\rho \to 0$ et pour $\rho \leq cos(\theta_0)$ on a :

$$\begin{aligned}
\frac{|z-1|}{1-|z|} = (1+|z|)\frac{|z-1|}{1-|z|^2} &\leq 2\frac{\rho}{2\rho cos(\varphi) - \rho^2} = \frac{2}{2cos(\varphi) - \rho} \\
&\leq \frac{2}{2cos(\theta_0) - cos(\theta_0)} = \frac{2}{cos(\theta_0)}
\end{aligned}$$

Soit $\alpha > 0$ tel que $\alpha \sum_{n=0}^{N} |R_n| < \varepsilon$ alors quand $z \in \Delta_{\theta_0}$ est tel que $|z-1| \leq min\{\alpha, cos(\theta_0)\}$, on a :

$$|f(z) - S| \leq \varepsilon + \varepsilon \frac{2}{cos(\theta_0)}$$

□

> **Théorème 2** *(Tauberien faible)*
> *Soit* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence supérieure ou égale à 1. On note* f *sa somme sur* $D(0,1)$*. On suppose qu'il existe* $S \in \mathbb{C}$, $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = S$.
> *Si* $a_n = o(\frac{1}{n})$ *alors* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *converge et* $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Preuve :
On cherche à montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $|S_N - S| \leq C\varepsilon$ pour une certaine constante C.
Pour cela on va montrer que $|S_N - S| \leq \left|S_N - f(1-\frac{\varepsilon}{N})\right| + \left|f(1-\frac{\varepsilon}{N}) - S\right|$.
Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_N := \sum_{n=0}^{N} a_n$ et pour $x \in]0,1[$ on a :

$$S_N - f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n(1-x^n) - \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n$$

Et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(1-x^n) = (1-x)(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}) \leq (1-x)n$.
Ainsi :

$$\begin{aligned}|S_N - f(x)| &\leq (1-x)\sum_{n=1}^{N} n|a_n| + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{n}{N}|a_n|x^n \\ &\leq (1-x)MN + \sup_{n>N}(n|a_n|)\frac{1}{N(1-x)}\end{aligned}$$

où M est un majorant de la suite $(n|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 0. Soit $0 < \varepsilon < 1$ on a :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \ \left|S_N - f(1-\frac{\varepsilon}{N})\right| \leq \varepsilon M + \frac{sup(n|a_n|)}{\varepsilon}$$

Dès lors, si N_0 est tel que $\sup_{n>N_0}(n|a_n|) < \varepsilon^2$ alors :

$$\forall N \geq N_0, \ \left|S_N - f(1-\frac{\varepsilon}{N})\right| \leq (M+1)\varepsilon$$

Par hypothèse on a : $\lim_{N\to+\infty} f(1-\frac{\varepsilon}{N}) = S$ donc

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \ \forall N \geq N_1, \ \left|f(1-\frac{\varepsilon}{N}) - S\right| \leq \varepsilon$$

D'où :

$$\begin{aligned}\forall N \geq max N_0, N_1, \ |S_N - S| &\leq \left|S_N - f(1-\frac{\varepsilon}{N})\right| + \left|f(1-\frac{\varepsilon}{N}) - S\right| \\ &\leq (M+1)\varepsilon + \varepsilon \\ &= (M+2)\varepsilon\end{aligned}$$

□

<u>**Questions**</u> **:**

• Exemples d'application du théorème d'Abel angulaire :

$$\underset{\substack{z\to 1\\ z\in\Delta_{\theta_0}}}{lim}\ arctan(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \underset{\substack{z\to 1\\ z\in\Delta_{\theta_0}}}{lim}\ ln(1+z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = ln(2)$$

• La réciproque du théorème d'Abel angulaire est elle vraie ?

Non, on a par exemple $\underset{\substack{z\to 1\\ |z|<1}}{lim}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n = \underset{\substack{z\to 1\\ |z|<1}}{lim}\frac{1}{1+z} = \frac{1}{2}$ alors que $\sum_{n\geq 0}(-1)^n$ diverge.