Prolongement de la fonction Gamma d'Euler

Leçons : 207, 239, 241, 245, 265

Références : Zuily-Queffélec p313 pour le lemme et Objectif Agrégation p82 pour le reste

Définition 1 *La fonction Gamma d'Euler est définie sur le demi-plan* $\mathscr{P} = \{z \in \mathbb{C}, Re(z) > 0\}$ *par*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} \, \mathrm{d}t$$

Lemme 1 *La fonction* Γ *est holomorphe sur* $\mathscr{P}$

Preuve :
On applique le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale à la fonction

$$(z,t) \mapsto e^{-t} t^{z-1} = e^{-t} e^{(z-1)ln(t)}$$

-$\forall z \in \mathscr{P}$, $t \mapsto e^{-t} e^{(z-1)ln(t)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$
-$\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $z \mapsto e^{-t} e^{(z-1)ln(t)}$ est holomorphe sur $\mathscr{P}$
-Si K est un compact de $\mathscr{P}$, $Re(z) \in [\varepsilon, M]$, où $\varepsilon > 0$ et

$$\left| e^{-t} e^{(z-1)ln(t)} \right| \leq \begin{cases} e^{(\varepsilon-1)ln(t)} = \dfrac{1}{t^{(1-\varepsilon)}} & \text{si} \quad 0 < t \leq 1 \\ t^{M-1} e^{-t} & \text{si} \quad t \geq 1 \end{cases}$$

Ces deux fontions sont intégrables et indépendantes de z. D'où l'holomorphie de Γ.

$\square$

On veut montrer qu'il existe une fonction $F(z)$ holomorphe dans $\{z \in \mathbb{C}, z \neq -n, n \in \mathbb{N}\}$ qui coïncide avec la fonction $\Gamma(z)$ pour tout $z \in \mathscr{P}$.

Théorème 1 Γ *se prolonge sur* $\mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}^-$ *sans zéro et admet des pôles simples en les* $-n$, $n \in \mathbb{N}$

Preuve :

- **Étape 1 :** Montrons que pour tout $z \in \mathscr{P}$, $\Gamma(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} \, \mathrm{d}t$

Découpons l'intégrale définissant Γ de la façon suivante :

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} \, \mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} \, \mathrm{d}t$$

On cherche donc maintenant à écrire la première intégrale sous la forme d'une série. On développe l'exponentielle :

$$e^{-t} t^{z-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1}$$

On vérifie maintenant que l'on peut permuter somme et intégrale avec le théorème de Fubini (appliqué à la mesure de Lebesgue et à la mesure de comptage).
On remarque que pour $t > 0$, $|t^z| = \left| e^{zln(t)} \right| = e^{Re(z)ln(t)} = t^{Re(z)}$
On obtient alors, pour tout $t \in]0,1]$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n!} \right| \left| t^{n+z-1} \right| = t^{Re(z)-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} = t^{Re(z)-1} e^t$

Comme $Re(z) > 0$, $Re(z)-1 > -1$ et la fonction $t \mapsto t^{Re(z)-1}e^t$ est intégrable sur $]0,1]$ par comparaison avec les intégrales de Riemann ($t^{Re(z)-1}e^t \leq t^{Re(z)-1}e^1$).
Ainsi $\displaystyle\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1} \right| \mathrm{d}t < +\infty$
On peut donc appliquer le théorème de Fubini et inverser somme et intégrale.

$$\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^{n+z-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}$$

On obtient bien, pour tout $z \in \mathscr{P}$,

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}\,\mathrm{d}t$$

• **Étape 2 :** Montrons que $f : z \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et que ses pôles sont les entiers négatifs ou nuls et sont simples.

On utilise le théorème sur les séries de fonctions méromorphes.
-$\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : z \mapsto \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et avec pour seul pôle simple $-n$.
-Soit K un compact de $\mathbb{C}$. Il existe $N_K \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset \overline{D(0, N_K)}$. Pour $n > N_K$, la fonction f_n n'a pas de pôle dans K.
De plus, pour tout $z \in K$, $|z+n| \geq n - |z| \geq n - N_K$.
Par conséquent, pour tout $z \in K$, $|f_n(z)| \leq \frac{1}{n!(n-N_K)}$ et donc $\displaystyle\sum_{n>N_K} f_n$ converge normalement sur K.
Donc par le théorème sur les séries de fonctions méromorphes, f est bien une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ dont les pôles simples sont les entiers négatifs.

• **Étape 3 :** On applique le théorème d'holomorphie sous le signe intégral pour conclure.

En reprenant la démonstration du lemme pour $t \geq 1$ on en déduit par le théorème d'holomorphie sous le signe intégral que $z \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}\,dt$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier.
Alors,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}\,\mathrm{d}t$$

établit un prolongement méromorphe de la fonction Γ sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^-$. Le théorème de prolongement analytique entraine de plus que c'est le seul prolongement analytique de Γ sur l'ouvert connexe $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^-$

$\square$

Complément :

> **Définition 2** *(Convergence uniforme sur tout compact)*
> *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et une série de la forme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$ où chaque terme f_n est une fonction méromorphe dans Ω. On dit que cette série converge uniformément sur tout compact si pour tout compact $K \subset \Omega$ il existe un entier naturel N_K tel que :*
> *H_1)Pour tout $n \geq N_K$, f_n n'a pas de pôle sur K.*

H_2)La série $\sum_{n=N_K}^{+\infty} f_n(z)$ *converge uniformément sur* K.

Théorème 2 *(Théorème sur les séries de fonctions méromorphes)*
Soit une série de fonctions méromorphes dans un ouvert Ω *:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$$

On suppose que cette série converge uniformément sur tout compact. Alors la somme S *de la série* $\sum f_n$ *est méromorphe dans* Ω.

Preuve :

On note P_n l'ensemble des pôles de f_n et on pose $P = \bigcup_{n=0}^{+\infty} P_n$. Soit $K \subset \Omega$ compact. Si K ne coupe pas P on peut choisir $N_K = 0$ pour réaliser les conditions H_1 et H_2 relative à K. Autrement dit, la série donnée induit sur l'ouvert $\Delta = \Omega \backslash P$ une série de fonctions holomorphes qui converge uniformément sur tout compact. Donc S est holomorphe dans Δ. Soit $z \in P$. Le singleton z étant compact, z n'est un pôle que pour un nombre fini de termes f_n. Soit m_z le plus grand ordre de ces pôles. Alors z est un pôle d'ordre $\leq m_z$ ou une fausse singularité pour les sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$. Donc z est un pôle ou une fausse singularité pour S. Ainsi S est bien méromorphe, et l'ensemble de ses pôles est inclus dans P.

□

Questions :
• Dans la preuve du Lemme 1, pourquoi les deux fonctions sont elles inté grables ?

Théorème 3 *Soit* $s \in \mathbb{R}$ *:*
1) *L'intégrale* $\int_0^1 \frac{dt}{t^s}$ *est convergente si* $s < 1$, *divergente si* $s \geq 1$.
2) *L'intégrale* $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s}$ *est convergente si* $s > 1$, *divergente si* $s \leq 1$.

Preuve :
1) Pour $s \neq 1$, et $x > 0$, on a : $\int_x^1 \frac{dt}{t^s} = \frac{1}{1-s}(1 - x^{1-s})$
-Si $s < 1$, $\lim_{x \to 0} x^{1-s} = 0$, l'intégrale est convergente.
-Si $s > 1$, la fonction $x \mapsto x^{1-s}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0. L'intégrale est divergente.
-Si $s = 1$, l'intégrale $\int_x^1 \frac{dt}{t} = -ln(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0. L'intégrale est divergente.
2) Pour $s \neq 1$, et $x > 0$, on a : $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s} = \frac{1}{1-s}(x^{1-s} - 1)$
-Si $s > 1$, $\lim_{x \to 0} x^{1-s} = 0$. L'intégrale est convergente.
-Si $s < 1$, la fonction $x \mapsto x^{1-s}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. L'intégrale est divergente.
-Si $s = 1$, l'intégrale $\int_1^x \frac{dt}{t} = ln(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. L'intégrale est divergente.

$\square$

Par le théorème 3.1 la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^{(1-\varepsilon)}}$ est intégrable sur $]0,1]$.
Montrons maintenant que pour tout réel α l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^\alpha e^{-t}\ dt$ converge.
On remarque que $t^\alpha e^{-t} = t^\alpha e^{-\frac{t}{2}} e^{-\frac{t}{2}}$ et on sait que $\displaystyle\lim_{x\to 0} t^\alpha e^{-\frac{t}{2}} = 0$, pour tout α.
En particulier, il existe un réel $A > 0$ tel que $\forall t > A \quad t^\alpha e^{-\frac{t}{2}} \leq 1$.
On obtient alors :

$$\forall t > A \quad t^\alpha e^t \leq e^{-\frac{t}{2}}$$

Or l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}}\ dt$ converge. En effet :

$$\int_1^x e^{-\frac{t}{2}}\ dt = \left[-2e^{-\frac{t}{2}}\right]_1^x = 2e^{-\frac{1}{2}} - 2e^{-\frac{x}{2}} \quad \text{ et } \quad \lim_{x\to+\infty} 2e^{-\frac{1}{2}} - 2e^{-\frac{x}{2}} = 2e^{-\frac{1}{2}}$$

Par le théorème de comparaison on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^\alpha e^{-t}\ dt$ converge.
Donc la fonction $t \longmapsto t^{M-1}e^{-t}$ est intégrable.