241 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples

X ensemble non vide qcq $(E, \|.\|)$ un evn de dimension finie (donc complet)

I) Définitions et premières propriétés

1) Convergence des suites et séries de fonctions

Amr p189 **Def 1**: On appelle série des fonctions f_n et on note $\sum f_n$ la suite (S_n) où $S_n : X \to E$, $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ et est appelée la n-ième somme partielle de la série $\sum f_n$

p139 p189 **Def 2**: Soit (f_n) une suite de fonction de $X \to E$ et f une application de $X \to E$. (f_n) converge simplement vers f sur X si $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$

• La série $\sum f_n$ converge simplement si (S_n) converge simplement

p140 p190 **Ex 3**: • Sur $[0,1]$, $f_n(x) = x^n$ converge simplement vers $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

• Sur $\mathbb{R}_+$, $\sum_{n=0}^{+\infty} x e^{-nx}$ converge simplement vers $\begin{cases} \frac{x}{1-e^{-x}} & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Def 4: (f_n) converge uniformément vers f sur X si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in X, \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$ (CVU)

• $\sum f_n$ CVU sur X si (S_n) CVU sur X

Prop 5: Si (f_n) (resp $\sum f_n$) CVU sur X alors (f_n) (resp $\sum f_n$) converge simplement sur X

p141 **Prop 6**: (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur X ssi il existe une suite $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n(x_n) - f(x_n) \not\to 0$

p190 **Def 7**: On appelle reste d'ordre n d'une série simplement convergente $\sum f_n$, la fonction $R_n : x \in X \mapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$

p191 **Prop 8**: Soit $\sum f_n$ une série qui converge simplement sur X. $\sum f_n$ CVU ssi (R_n) CVU vers 0 sur X.

p142 **Ct-Ex 9**: • $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$, $x_n = \frac{\pi}{2n}$ alors $f_n(\frac{\pi}{2n}) = \frac{1}{1+\frac{\pi^2}{4}} \not\to 0$

• $\sum_{n \in \mathbb{N}} x e^{-nx}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$ mais converge simplement car $R_n(\frac{1}{n+1}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{e}$ p191

Prop 10: (Critère de Cauchy uniforme)

• (f_n) CVU sur X ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall p \geq N, \forall x \in X$ $\|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$

• $\sum f_n$ CVU ssi le critère précédent est vérifié pour (S_n)

App 11: La limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions polynômes est une fonction polynôme. p185

Def 12: On note $B(X,E)$ l'ev des applications bornées de X dans E. On pose pour $f \in B(X,E)$ la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$ appelée norme de la convergence uniforme p145

Prop 13: $(f_n) \in B(X,E)^{\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f \in B(X,E)$ sur X ssi $\|f_n - f\|_\infty \to 0$

Thm 14: (Weierstrass) Toute fonction f continue sur un intervalle $[a,b]$ compact, à valeurs réelles ou complexes est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de fonctions polynomiales p158

Def 15: $\sum f_n$ converge absolument sur X si $\forall x \in X$, $\sum \|f_n(x)\|$ converge p192

Prop 16: Si $\sum f_n$ converge absolument sur X alors elle converge simplement

Ct-Ex 17: $\sum \frac{(-1)^n}{nx}$ converge simplement mais pas absolument sur $\mathbb{R}_+^*$

Def 18: On dit que $\sum f_n$ converge normalement sur X si $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in B(X,E)$ et si $\sum \|f_n\|_\infty$ converge p193

Ex 19: $\sum x e^{-nx}$ converge normalement sur $]a, +\infty[$, $a > 0$

Thm 20: Si $\sum f_n$ converge normalement sur X alors elle converge absolument et uniformément sur X et on a $\|\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\|_\infty \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_\infty$

Ct-Ex 21: Sur $[0,1]$, $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n+1}[\cup [\frac{1}{n}, 1] \\ \frac{1}{n} & \text{si } x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[\end{cases}$ p194

$\sum f_n$ CVU sur $[0,1]$ mais pas normalement

2) Limite et continuité

p147 **Thm 22**: X partie non vide d'un evn de dimension finie F, (f_n) une suite uniformément convergente d'applications continues de X dans E. Alors la limite f est continue

Thm 23: (double limite) Soit $(f_n : X \to E)$ CVU vers f. Soit $a \in \bar{X}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = \lim\limits_{x \to a} f_n(x)$ existe alors la limite uniforme de (f_n) a pour limite quand $x \to a$ $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n$ ie $\lim\limits_{x \to a} \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \lim\limits_{x \to a} f_n(x)$

p195 **Thm 24**: Soit $a \in \bar{X}$ et $f_n : X \to E$. Si $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n a une limite l_n en a. Si $\sum f_n$ CVU alors $\sum l_n$ converge dans E et $\lim\limits_{x \to a} S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} l_n$
ie $\lim\limits_{x \to a} \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\lim\limits_{x \to a} f_n(x) \right)$

Thm 25: Soit (f_n) une suite de fonctions continues de X dans E tq $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue et $\sum f_n$ CVU sur X alors la fonction somme de la série $\sum f_n$ est continue sur X

p196 **Ex 26**: $x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{e^{-n|x|}}{n^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$

II/ Dérivation et intégration

1) Dérivabilité

Thm 27: Soit (f_n) une suite d'applications $\mathcal{C}^1$ de $[a,b]$ dans E.
p150 Si $\exists x_0 \in [a,b]$ tel que $(f_n(x_0))$ converge et si (f_n') converge uniformément sur $[a,b]$ vers g alors (f_n) CVU sur $[a,b]$ vers $f \in \mathcal{C}^1$. De plus, $f' = g$

p148 **Ct-Ex 28**: $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$ sur $\mathbb{R}$ converge vers $f(x) = |x|$ non dérivable en 0 mais $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{C}^\infty$

Thm 29: Soit (f_n) suite de fonctions dérivables de I dans E. Si $\exists a \in I$ tq $\sum f_n(a)$ converge et si $\sum f_n'$ CVU sur I alors $\sum f_n$ converge simplement sur I, uniformément sur tout segment inclus dans I et dérivable avec $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n \right)' = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n'$

p221 **Ex 30**: $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{x+n}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

2) Interversion limite et intégrale

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré

Def 31: Soit N un ensemble mesurable tel que $\mu(N) = 0$, $f_n \to f$ μ-pp si $f_n(x) \to f(x)$, $\forall x \in X \setminus N$

Def 32: Soit $p \in [1, +\infty[$. On définit $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$ pour tout $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{K}$. f_n converge dans L^p vers f si $\|f_n - f\|_p \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Thm 33: (Beppo-Levi) Soit (f_n) suite croissante de fonctions mesurables positives. Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n$ est mesurable et
$\int_X \lim\limits_{n \to +\infty} f_n \, d\mu = \lim\limits_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu \in \bar{\mathbb{R}}_+$

Lem 34: (Fatou) Soit (f_n) suite de fonctions mesurables positives alors $0 \le \int_X \liminf\limits_{n \to +\infty} f_n \, d\mu \le \liminf\limits_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu \le +\infty$

Ex 35: Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables positives qui converge simplement vers f. On suppose qu'il existe $M > 0$ tq $\int_X f_n \, d\mu \le M$, $\forall n \in \mathbb{N}$ alors $\int_X f \, d\mu \le M$

Thm 36: (Convergence dominée) Soit (f_n) suite de fonctions mesurables p155
sur X tq $\forall x \in X$, $f_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(x)$. Si $g \in L^1(\mu)$ tq $|f_n(x)| \le g(x)$ $\forall x \in X$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$

Ct-Ex 37: $f_n(x) = \mathbb{1}_{[n, n+1]}(x)$, (f_n) converge simplement vers 0
$\lim\limits_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) \, dx = 1$ mais $\int_{\mathbb{R}} f(x) \, dx = 0$

3) Interversion somme et intégrale

Thm 38: Soit $f_n : [a,b] \to E$ intégrable. Si $\sum f_n$ CVU sur $[a,b]$ alors p199
$S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est intégrable sur $[a,b]$, $\left(\int_a^b f_n(t) \, dt \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et on a $\int_a^b \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(t) \, dt \right)$

Ex 39: $\int_0^1 x^x \, dx = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^n}$ p215

Thm 40: Soit (f_n) suite de fonctions $\mathcal{C}_{pm}(I)$, I intervalle qcq tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_I |f_n(x)| \, dx < +\infty$. Si $\sum f_n$ converge simplement sur I si $S \in \mathcal{C}_{pm}(I)$, si $\sum \int_I f_n(x) \, dx$ converge absolument alors $\int_I |S(x)| \, dx < +\infty$ et $\int_I S(x) \, dx = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(x) \, dx$

Exo 41 : Soit $z \in \mathbb{C}$ tq $\mathrm{Re}(z) > 0$. Soit $f_n(t) = \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1}$
alors $\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n}$

III/ Exemples de séries

1) Séries entières

p 229 Def 42 : On appelle série entière complexe de variable complexe une série de fonctions de la forme $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ avec $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

p 230 Prop 43 : Si $(a_n z_0^n)$ est bornée avec $z_0 \in \mathbb{C}$ alors $\forall z \in \mathbb{C}$ tq $0 \le |z| < z_0$, $\sum a_n z^n$ converge absolument

p 231 Def 44 : On définit le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ comme le nombre $R = \sup\{ r \ge 0 \mid (|a_n| r^n) \text{ soit bornée}\}$

DEV 1

Thm 45 : (Abel angulaire) Soit $\sum a_n z^n$ série entière de rayon de convergence ≥ 1 tq $\sum a_n$ converge. Soit f la somme de cette série sur $D(0,1)$. Soit $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et
$\Delta_{\theta_0} = \{ z \in \mathbb{C}, |z| < 1 \text{ et } \exists \rho \ge 0, \exists \theta \in]-\theta_0, \theta_0[, z = 1 - \rho e^{i\theta} \}$
alors $\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

Thm 46 : (Taubérien faible) Avec les mêmes notations, on suppose que $\exists S \in \mathbb{C}$, $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = S$. Si $a_n = o(\frac{1}{n})$ alors $\sum a_n$ converge vers S.

2) Séries de Fourier

Def 47 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue par morceaux et 2π-périodique ($\mathcal{C}_{pm-2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$)
p 299 On appelle coefficient de Fourier de f : $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) e^{-int}\,dt$
$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(t)\,dt$, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$

p 301 Def 48 : On appelle série de Fourier de f la série :
$S(f)(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{int} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$

p 310 Thm 49 : (Parseval) Soit $f \in \mathcal{C}_{pm-2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ alors $\sum |c_n(f)|^2$, $\sum |a_n(f)|^2$, $\sum |b_n(f)|^2$ convergent et on a :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt$$

Thm 50 : (Dirichlet) Soit $f \in \mathcal{C}_{pm-2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $\mathcal{C}^1_{pm}$ sur $[0, 2\pi]$. p 314
Alors la série de Fourier de f converge simplement vers $\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$ sur $\mathbb{R}$

Thm 51 : Soit $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $\mathcal{C}^1_{pm}$. Alors la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$ avec pour somme la fonction f

App 52 : $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

3) Séries holomorphes

Def 53 : Soit Ω ouvert de $\mathbb{C}$ et soit $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$ où f_n est une fonction Pab
méromorphe dans Ω. Cette série converge uniformément sur tout compact si pour tout compact $K \subset \Omega$, $\exists N_K \in \mathbb{N}$ tq : p 136
1) $\forall n \ge N_K$, f_n n'a pas de pôle sur K
2) La série $\sum_{n=N_K}^{+\infty} f_n(z)$ CVU sur K

Thm 54 : Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$ une série de fonctions méromorphes dans un ouvert Ω. Si cette série CVU sur tout compact alors la somme S de la série $\sum f_n$ est méromorphe dans Ω.

Thm 55 : La fonction Γ définie sur le plan $P = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$ par $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1}\,dt$ se prolonge sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ sans zéro et admet des pôles simples en les $-n$, $n \in \mathbb{Z}$ DEV 2

Prop 56 : $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

Thm 57 : (formule des compléments) $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, $\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$

App 58 : $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

Références : El Amrani – Pabion