241 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples

X ensemble non vide qcq $(E, \|\cdot\|)$ un evn de dimension finie (donc complet)

I) Définitions et premières propriétés

1) Convergence des suites et séries de fonctions

Ams p183 **Def 1**: On appelle série des fonctions f_n et on note $\sum f_n$ la suite (S_n) où $S_n : X \to E$, $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ et est appelée la n-ième somme partielle de la série $\sum f_n$

p139 p183 **Def 2**: Soit (f_n) une suite de fonction de $X \to E$ et f une application de $X \to E$. (f_n) converge simplement vers f sur X si $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$

• La série $\sum f_n$ converge simplement si (S_n) converge simplement

p140 p190 **Ex 3**: • Sur $[0,1]$, $f_n(x) = x^n$ converge simplement vers $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

• Sur $\mathbb{R}_+$, $\sum_{n=0}^{+\infty} x e^{-nx}$ converge simplement vers $\begin{cases} \frac{x}{1-e^{-x}} & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Def 4: (f_n) converge uniformément vers f sur X si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in X, \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$ (CVU)

• $\sum f_n$ CVU sur X si (S_n) CVU sur X

Prop 5: Si (f_n) (resp $\sum f_n$) CVU sur X alors (f_n) (resp $\sum f_n$) converge simplement sur X

Prop 6: (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur X ssi il existe une suite $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n(x_n) - f(x_n) \not\to 0$

p141 p190 **Def 7**: On appelle reste d'ordre n d'une série simplement convergente $\sum f_n$, la fonction $R_n : x \in X \mapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$

p191 **Prop 8**: Soit $\sum f_n$ une série qui converge simplement sur X. $\sum f_n$ CVU ssi (R_n) CVU vers 0 sur X.

p142 **Ct-Ex 9**: • $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$, $x_n = \frac{\pi}{2n}$ alors $f_n(\frac{\pi}{2n}) = \frac{1}{1+\frac{\pi^2}{4}} \not\to 0$

• $\sum_{n \in \mathbb{N}} x e^{-nx}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$ mais converge simplement car $R_n\left(\frac{1}{n+1}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{e}$ p191

Prop 10: (Critère de Cauchy uniforme)

• (f_n) CVU sur X ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall p \geq N, \forall x \in X$ $\|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$

• $\sum f_n$ CVU ssi le critère précédent est vérifié pour (S_n)

App 11: La limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions polynômes est une fonction polynôme. p185

Def 12: On note $B(X,E)$ l'ev des applications bornées de X dans E. On pose pour $f \in B(X,E)$ la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$ appelée norme de la convergence uniforme p145

Prop 13: $(f_n) \in B(X,E)^{\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f \in B(X,E)$ sur X ssi $\|f_n - f\|_\infty \to 0$

Thm 14: (Weierstrass) Toute fonction f continue sur un intervalle $[a,b]$ compact, à valeurs réelles ou complexes est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de fonctions polynomiales p158

Def 15: $\sum f_n$ converge absolument sur X si $\forall x \in X$, $\sum \|f_n(x)\|$ converge p192

Prop 16: Si $\sum f_n$ converge absolument sur X alors elle converge simplement

Ct-Ex 17: $\sum \frac{(-1)^n}{nx}$ converge simplement mais pas absolument sur $\mathbb{R}_+^*$

Def 18: On dit que $\sum f_n$ converge normalement sur X si $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in B(X,E)$ et si $\sum \|f_n\|_\infty$ converge p193

Ex 19: $\sum x e^{-nx}$ converge normalement sur $]a, +\infty[$, $a > 0$

Thm 20: Si $\sum f_n$ converge normalement sur X alors elle converge absolument et uniformément sur X et on a $\left\|\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right\|_\infty \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_\infty$

Ct-Ex 21: Sur $[0,1]$, $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n+1}[\cup [\frac{1}{n}, 1] \\ \frac{1}{n} & \text{si } x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[\end{cases}$ p194

$\sum f_n$ CVU sur $[0,1]$ mais pas normalement