2) Limite et continuité

p147 **Thm 22 :** X partie non vide d'un evn de dimension finie F, (f_n) une suite uniformément convergente d'applications continues de X dans E. Alors la limite f est continue

Thm 23 : (double limite) Soit $(f_n : X \to E)$ CVU vers f. Soit $a \in \overline{X}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = \lim_{x \to a} f_n(x)$ existe alors la limite uniforme de (f_n) a pour limite quand $x \to a$ $\lim_{n \to +\infty} b_n$ ie $\lim_{x \to a} \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \lim_{x \to a} f_n(x)$

p195 **Thm 24 :** Soit $a \in \overline{X}$ et $f_n : X \to E$. Si $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n a une limite l_n en a. Si $\sum f_n$ CVU alors $\sum l_n$ converge dans E et $\lim_{x \to a} S_m(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} l_n$

ie $\lim_{x \to a} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x \to a} f_n(x) \right)$

Thm 25 : Soit (f_n) une suite de fonctions continues de X dans E tq $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue et $\sum f_n$ CVU sur X alors la fonction somme de la série $\sum f_n$ est continue sur X

p196 **Ex 26 :** $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n|x|}}{n^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$

II/ Dérivation et intégration

1) Dérivabilité

p150 **Thm 27 :** Soit (f_n) une suite d'applications $\mathcal{C}^1$ de $[a,b]$ dans E. Si $\exists x_0 \in [a,b]$ tel que $(f_n(x_0))$ converge et si (f_n') converge uniformément sur $[a,b]$ vers g alors (f_n) CVU sur $[a,b]$ vers $f \in \mathcal{C}^1$. De plus, $f' = g$

p148 **Ct-Ex 28 :** $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$ sur $\mathbb{R}$ converge vers $f(x) = |x|$ non dérivable en 0 mais $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{C}^\infty$

Thm 29 : Soit (f_n) suite de fonctions dérivables de I dans E. Si $\exists a \in I$ tq $\sum f_n(a)$ converge et si $\sum f_n'$ CVU sur I alors $\sum f_n$ converge simplement sur I, uniformément sur tout segment inclus dans I et dérivable avec $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$

p221 **Ex 30 :** $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

2) Interversion limite et intégrale

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré

Def 31 : Soit N un ensemble mesurable tel que $\mu(N) = 0$, $f_n \to f$ μ-pp si $f_n(x) \to f(x)$, $\forall x \in X \setminus N$

Def 32 : Soit $p \in [1, +\infty[$. On définit $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$ pour tout $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{K}$. f_n converge dans L^p vers f si $\|f_n - f\|_p \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Thm 33 : (Beppo-Levi) Soit (f_n) suite croissante de fonctions mesurables positives. Alors $\lim_{n \to +\infty} f_n$ est mesurable et $\int_X \lim_{n \to +\infty} f_n \, d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu \in \overline{\mathbb{R}}_+$

Lem 34 : (Fatou) Soit (f_n) suite de fonctions mesurables positives alors $0 \leq \int_X \liminf_{n \to +\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu \leq +\infty$

Ex 35 : Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables positives qui converge simplement vers f. On suppose qu'il existe $M \geq 0$ tq $\int_X f_n \, d\mu \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$ alors $\int_X f \, d\mu \leq M$

Thm 36 : (Convergence dominée) Soit (f_n) suite de fonctions mesurables sur X tq $\forall x \in X$, $f_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(x)$. Si $g \in L^1(\mu)$ tq $|f_n(x)| \leq g(x)$ $\forall x \in X$ alors $\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$ p155

Ct-Ex 37 : $f_n(x) = \mathbb{1}_{[n, n+1]}(x)$, (f_n) converge simplement vers 0 $\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) \, dx = 1$ mais $\int_{\mathbb{R}} f(x) \, dx = 0$

3) Interversion somme et intégrale

Thm 38 : Soit $f_n : [a,b] \to E$ intégrable. Si $\sum f_n$ CVU sur $[a,b]$ alors p199
$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est intégrable sur $[a,b]$, $\left(\int_a^t f_n(t) \, dt \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et on a $\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(t) \, dt \right)$

Ex 39 : $\int_0^1 x^x \, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}$ p215

Thm 40 : Soit (f_n) suite de fonctions $\mathcal{C}_{pm}(I)$, I intervalle qcq tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_I |f_n(x)| \, dx < +\infty$. Si $\sum f_n$ converge simplement sur I si $S \in \mathcal{C}_{pm}(I)$, si $\sum \int_I f_n(x) \, dx$ converge absolument alors $\int_I |S(x)| \, dx < +\infty$ et $\int_I S(x) \, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(x) \, dx$