Ex 41 : Soit $z \in \mathbb{C}$ tq $\mathrm{Re}(z) > 0$. Soit $f_n(t) = \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1}$

alors $\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}$

III / Exemples de séries

1) Séries entières

p 229 Def 42 : On appelle série entière complexe de variable complexe une série de fonctions de la forme $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ avec $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

p 230 Prop 43 : Si $(a_n z_0^n)$ est bornée avec $z_0 \in \mathbb{C}$ alors $\forall z \in \mathbb{C}$ tq $0 \leq |z| < z_0$, $\sum a_n z^n$ converge absolument

p 231 Def 44 : On définit le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ comme le nombre $R = \sup \{ r \geq 0 \mid (|a_n| r^n) \text{ soit bornée} \}$

DEV 1

Thm 45 : (Abel angulaire) Soit $\sum a_n z^n$ série entière de rayon de convergence ≥ 1 tq $\sum a_n$ converge. Soit f la somme de cette série sur $D(0,1)$. Soit $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et

$\Delta_{\theta_0} = \{ z \in \mathbb{C}, |z| < 1 \text{ et } \exists \rho \geq 0, \exists \theta \in]-\theta_0, \theta_0[, z = 1 - \rho e^{i\theta} \}$

alors $\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

Thm 46 : (Taubérien faible) Avec les mêmes notations, on suppose que $\exists S \in \mathbb{C}$, $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x \leq 1}} f(x) = S$. Si $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ alors $\sum a_n$ converge vers S.

2) Séries de Fourier

p 299 Def 47 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue par morceaux et 2π-périodique $(\mathcal{C}_{pm-2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}))$. On appelle coefficient de Fourier de f : $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int}\,dt$

$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(t)\,dt$, $b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt)\,dt$

p 301 Def 48 : On appelle série de Fourier de f la série :

$S(f)(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{int} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) \right)$

p 310 Thm 49 : (Parseval) Soit $f \in \mathcal{C}_{pm-2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ alors $\sum |c_n(f)|^2$, $\sum |a_n(f)|^2$, $\sum |b_n(f)|^2$ convergent et on a :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2 \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt$$

Thm 50 : (Dirichlet) Soit $f \in \mathcal{C}_{pm-2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\mathcal{C}^1_{pm}$ sur $[0, 2\pi]$. Alors la série de Fourier de f converge simplement vers $\frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$ sur $\mathbb{R}$ p 314

Thm 51 : Soit $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\mathcal{C}^1_{pm}$. Alors la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$ avec pour somme la fonction f

App 52 : $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

3) Séries holomorphes

Def 53 : Soit Ω ouvert de $\mathbb{C}$ et soit $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$ où f_n est une fonction méromorphe dans Ω. Cette série converge uniformément sur tout compact si pour tout compact $K \subset \Omega$, $\exists N_K \in \mathbb{N}$ tq : Pab p 136

1) $\forall n \geq N_K$, f_n n'a pas de pôle sur K

2) La série $\sum_{n=N_K}^{+\infty} f_n(z)$ CVU sur K

Thm 54 : Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$ une série de fonctions méromorphes dans un ouvert Ω. Si cette série CVU sur tout compact alors la somme S de la série $\sum f_n$ est méromorphe dans Ω.

Thm 55 : La fonction Γ définie sur le plan $\mathcal{P} = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0 \}$ par $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1}\,dt$ se prolonge sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ sans zéro et admet des pôles simples en les $-n$, $n \in \mathbb{Z}$ DEV 2

Prop 56 : $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

Thm 57 : (formule des compléments) $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, $\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$

App 58 : $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Références : El Amrani - Pabion