Nombres de Bell.

Thm: Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n le nombre de partitions de $[\![1,n]\!]$, ($B_0 = 1$). On a alors $B_n = \frac{1}{e} \sum_{k \geq 0} \frac{k^n}{k!}$

→ **Étape 1**: Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$.

$n=1$: B_1 est le nombre de partitions de $[\![1,1]\!]$: $(\{1\})$ donc $B_1 = 1$.

$n=2$: B_2 est le nombre de partitions de $[\![1,2]\!]$: $(\{1\} \cup \{2\}$ ou $[\![1,2]\!])$ donc $B_2 = 2$.

$n=3$: B_3 est le nombre de partitions de $[\![1,3]\!]$: $(\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \in E_0$, $\{1,2\} \cup \{3\} \in E_0$, $\{1,3\} \cup \{2\} \in E_1$, $\{2,3\} \cup \{1\} \in E_1$ ou $[\![1,3]\!] \in E_2)$ donc $B_3 = 5$.

Pour $k \in [\![0,n]\!]$, considérons l'ensemble E_k des partitions de $[\![1,n+1]\!]$ pour lesquelles la partie de $[\![1,n+1]\!]$ contenant $n+1$ est de cardinal $k+1$. On a $\mathrm{card}(E_k) = \binom{n}{k} B_{n-k}$. En effet, on choisit k éléments de $[\![1,n]\!]$ (qui seront avec $n+1$). Puis, il faut compter les partitions des $n-k$ éléments restants.

Comme $E_0, E_1, \ldots, E_n$ forment une partition de l'ensemble des partitions de $[\![1,n+1]\!]$, on obtient :

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{card}(E_k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$

D'où $\boxed{B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k}$

→ **Étape 2**: Montrons que $\sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence non nul.

Montrons par récurrence que $B_n \leq n!$

(I) Si $n=0$: $B_0 = 1 \leq 0! = 1$.

(H) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $B_n \leq n!$.

$$B_{n+1} \underset{\text{Etape 1}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \underset{\text{HR}}{\leq} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k! = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} k! = n! \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{1}{(n-k)!}}_{\leq 1}$$

$$\leq n!(n+1) = (n+1)!$$

On a donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{B_n}{n!} \leq 1$ et le rayon de convergence R de la série entière est supérieure ou égale à 1.

Ainsi, sur $]-R,R[$, $\sum_{k \geq 0} \frac{B_n}{n!} x^n$ converge et on note $f(x)$ sa somme.

On a : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$.

→ **Étape 3 :** Montrons que $\forall x \in]-R,R[$, $f(x) = \frac{1}{e} e^{e^x}$.

Sur $]-R,R[$, f est dérivable et on a :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \right) \frac{x^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{B_k}{n!} \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!(n-k)!} \right) x^n$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) = e^x f(x)$$

On obtient donc, $\forall x \in]-R,R[$, $f'(x) - e^x f(x) = 0$. On en déduit, $\exists C \in \mathbb{R}$, $\forall x \in]-R,R[$, $f(x) = C \exp(e^x)$. Or $f(0) = B_0 = 1 = C.e$ donc $C = \frac{1}{e}$.

D'où $\forall x \in]-R,R[$, $f(x) = \frac{1}{e} e^{e^x}$.

→ **Étape 4 :** Montrons que $\forall k \in \mathbb{N}$, $B_k = \frac{1}{e} \sum_{n \geq 0} \frac{n^k}{n!}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad e^{e^x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} \right)$$

Considérons la série double $(u_{n,k})_{(n,k) \in \mathbb{N}^2}$, $u_{n,k} = \frac{(nx)^k}{n!\,k!}$. On a $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |u_{n,k}| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|nx|^k}{n!\,k!} = \frac{e^{|nx|}}{n!} < +\infty \text{ puis}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{|nx|}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(e^{|x|})^n}{n!} = e^{e^{|x|}} < +\infty.$$

La série double est donc sommable $\forall x \in \mathbb{C}$. On peut donc échanger l'ordre des sommations : Donc $\forall x \in]-R,R[$,

$$f(x) = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!\,n!} \right) = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!\,n!} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{n!} \right) \frac{x^k}{k!}$$

Par unicité du développement en série entière de f, on a $\forall k \in \mathbb{N}$, $B_k = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{n!}$