Convolution

Références bibliographiques :
- Analyse fonctionnelle, H. Brézis.
- Théorie de l'intégration, Marc Briane et Gilles Pagès, Vuibert, 2012.
- Distributions et équations aux dérivées partielles. Exercices corrigés. C. Zuily, Hermann, 1986.

Partie I. Rappels de cours

Soit f et g deux fonctions boréliennes de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$. On dit qu'elles sont convolables si pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction $y \mapsto f(y)g(x-y)$ appartient à L^1. Si f et g sont convolables, on définit leur produit de convolution $f*g$ presque partout par la formule

$$f*g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy.$$

Quand deux fonctions sont convolables ?
- Le cadre le plus classique est celui des fonctions L^1 :
$$f,g \in L^1 \quad \Rightarrow \quad f*g \in L^1 \quad \text{et} \quad \|f*g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}.$$
- Plus généralement, grâce à l'inégalité de Young, on peut convoler deux fonctions de L^p et L^q dès lors que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} \geq 1$:
$$1 \leq p,q,r \leq \infty,\ 1+\frac{1}{r} = \frac{1}{p}+\frac{1}{q},\ f \in L^p, g \in L^q \quad \Rightarrow \quad f*g \in L^r \quad \text{et} \quad \|f*g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q} \quad \text{(Young)}$$
- On peut également se contenter d'une condition sur les supports : si $f,g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ vérifient la condition des supports suivante
$$\forall K \text{ compact de } \mathbb{R}^n,\ \text{l'ensemble } M_K = \{(x,y)\ ;\ x \in \operatorname{supp} f,\ y \in \operatorname{supp} g,\ x+y \in K\} \text{ est un compact de } \mathbb{R}^{2n}$$
alors f et g sont convolables. En particulier, si f est une fonction de L^1 à support compact et $g \in L^1_{loc}$, alors f et g sont convolables.

On peut aussi convoler deux mesures finies μ et ν sur $\mathbb{R}^n$ en posant

$$\mu*\nu(A) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \mathbb{1}_A(x+y)\,d\mu(x)\,d\nu(y)$$

ou encore

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu*\nu = \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(x+y)\,d\mu(x)\,d\nu(y).$$

Enfin, en utilisant que la transformée de Fourier d'un produit de convolution est le produit des transformées de Fourier, on peut étendre la notion de convolution à des distributions :
- Si $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ (c'est-à-dire u est une distribution tempérée) et $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ (c'est-à-dire f est une fonction à décroissance rapide) alors on peut définir $u*f$ par
$$u*f = \mathscr{F}^{-1}(\widehat{u}\widehat{f})$$
où $\mathscr{F}$ désigne la transformation de Fourier et $\widehat{u} = \mathscr{F}(u)$ la transformée de Fourier de u. En effet, $\widehat{f}$ est aussi une fonction à décroissance rapide et on peut la multiplier par $\widehat{u}$ pour obtenir une distribution tempérée. On peut donc appliquer la transformation de Fourier inverse à cette distribution tempérée.

— Si $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ et v est une distribution à support compact alors on peut encore définir la convolution $u * v$ par

$$u * v = \mathscr{F}^{-1}(\widehat{u}\widehat{v})$$

En effet, v étant à support compact sa transformée de Fourier est une fonction à croissance lente qui peut donc multiplier une distribution tempérée pour obtenir une autre distribution tempérée. Par conséquent, on peut lui appliquer la transformation de Fourier inverse. On peut aussi montrer que si u est une fonction C^∞ alors $u * v$ est une fonction C^∞ aussi.

Voici quelques propriétés du produit de convolution :

— Le produit de convolution est commutatif, distributif et associatif dans L^1.

— Ce n'est pas associatif en général comme on peut le voir sur l'exemple $f = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}$, $g = \mathbb{1}_{[0,1]} - \mathbb{1}_{[-1,0]}$ et $h = 1$.

— Lorsqu'on dérive ou on applique une translation à un produit de convolution, on peut faire porter la dérivation ou la translation sur n'importe lequel des deux termes.

— Nous avons que $\mathrm{supp}(f * g) \subset \overline{\mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(g)}$.

— $\widehat{f * g} = \widehat{f}\,\widehat{g}$.

Le produit de convolution admet des nombreuses applications. Citons quelques-unes :

— Pour régulariser des fonctions peu régulières en les convolant avec une approximation de l'identité. On obtient ainsi des nombreux théorèmes de densité des fonctions régulières.

— Pour résoudre des équations aux dérivées partielles. Il existe la notion de solution fondamentale qui permet de résoudre une EDP en faisant simplement la convolution avec la solution fondamentale. Voir ci-dessous l'exemple de l'équation de la chaleur.

— En probabilités : la loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes est le produit de convolution des deux lois.

Partie II. Exercices

Exercice 1. Soient f et g deux fonctions convolables. Montrer que

a) $\operatorname{supp}(f*g) \subset \overline{\operatorname{supp}(f)+\operatorname{supp}(g)}$;

b) Si $\operatorname{supp}(f)$ ou $\operatorname{supp}(g)$ est compact alors $\operatorname{supp}(f*g) \subset \operatorname{supp}(f)+\operatorname{supp}(g)$;

c) Si f et g sont à support compact alors $f*g$ l'est aussi.

Exercice 2. (Calculs explicites) Soit $H = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}$ la fonction caractéristique de $\mathbb{R}^+$, δ_a la masse de Dirac en a et $\delta_{S(0,r)}$ la mesure de surface de la sphère $S(0,r)$. Calculer les convolutions suivantes :

a) $\delta_a * \delta_b$

b) $H * H$

c) $\mathbb{1}_{[0,1]} * xH$

d) $|x|^2 * \delta_{S(0,r)}$ dans $\mathbb{R}^3$

e) $\mathbb{1}_{[0,1]} * \mathbb{1}_{[0,1]} * \cdots * \mathbb{1}_{[0,1]}$

f) $e^{-|x|} * e^{-|x|}$ dans $\mathbb{R}$.

g) $e^{-x^2} * e^{x^2}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3. (Inégalité de Young) Soient $p,q,r \in [1,\infty]$ tels que $1+\frac{1}{r} = \frac{1}{p}+\frac{1}{q}$. Le but de cet exercice est de montrer que si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ alors f et g sont convolables, $f*g \in L^r(\mathbb{R}^d)$ et

$$\|f*g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

a) Montrer le résultat lorsque $r=1$.

b) Montrer le résultat lorsque $r=\infty$.

c) Montrer la variante suivante de l'inégalité de Hölder : si $f_1 \in L^{p_1}$, $f_2 \in L^{p_2}$ et $f_3 \in L^{p_3}$ avec $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3} = 1$ alors $f_1 f_2 f_3 \in L^1$ et
$$\|f_1 f_2 f_3\|_{L^1} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}}\|f_2\|_{L^{p_2}}\|f_3\|_{L^{p_3}}.$$

d) On considère maintenant le cas où $1<r<\infty$. Écrire
$$|f(x-y)g(y)| = |f(x-y)|^{\frac{p}{r}}|g(y)|^{\frac{q}{r}}|f(x-y)|^{1-\frac{p}{r}}|g(y)|^{1-\frac{q}{r}}$$
et conclure en appliquant la question précédente.

e) Montrer que si $r=\infty$ alors $f*g$ est de plus continue. Si en plus p et q sont finis alors $f*g$ est aussi nulle à l'infini. Cela reste vrai lorsque $p=\infty$ ou $q=\infty$?

Exercice 4. (Équation de la chaleur) Pour tout $t>0$ et $x \in \mathbb{R}^d$ on note

$$G(t,x) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

le noyau de la chaleur. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ où $1 \leq p < \infty$. Montrer que $u(t,x) = G(t,\cdot)*f$ est solution de l'équation de la chaleur avec donnée initiale f, c'est-à-dire que

$$\partial_t u - \Delta_x u = 0 \quad \text{pour } t>0,\ x \in \mathbb{R}^d$$

et que $u(t,\cdot)$ converge vers f dans L^p lorsque t tend vers 0. Cela reste-t-il vrai si $p=\infty$? Si non, quelles hypothèses faudrait-il ajouter ?

Exercice 5. (Approximation de l'unité) On note $|\cdot|$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^d$. On considère une suite régularisante, c'est-à-dire une suite de fonctions ρ_k de classe C^∞ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}_+$ telles que

— $\rho_k(x) = 0$ si $|x| \geq \frac{1}{k}$;

— $\int \rho_k(x)\,dx = 1$.

a) Soit ρ la fonction définie sur $\mathbb{R}^d$ par

$$\rho(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{si } |x| < 1. \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Montrer que ρ est de classe C^∞ et construire une suite régularisante à l'aide de ρ.

b) Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ continue. Montrer que ρ_k et f sont convolables, puis que $\rho_k * f$ converge vers f uniformément sur tout compact.

c) Soit $f \in L^p$ pour $1 \leq p < \infty$. Montrer que $\rho_k * f$ converge vers f dans L^p (on utilisera le fait que les fonctions continues à support compact sont denses dans L^p).

d) Soit f une fonction intégrable et g une fonction de classe C^1 à support compact. Montrer que f et g sont convolables, que $f * g$ est de classe C^1 et que, pour tout $1 \leq j \leq n$, on a

$$\frac{\partial (f*g)}{\partial x_j} = f * \frac{\partial g}{\partial x_j}.$$

e) Montrer que les fonctions C^∞ à support compact forment une partie dense de L^p si $1 \leq p < \infty$. Cela reste-t-il vrai pour L^∞ ? Et pour $C^0(\mathbb{R}^d)$?

Exercice 6. Soit $a \in \mathbb{R}^d$. On note τ_a l'application qui à une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ associe la fonction $\tau_a f$ définie par $\tau_a f(x) = f(x-a)$. Soit $p \in [1, \infty[$. Le but de cet exercice est de démontrer que, pour tout $f \in L^p$, l'application $T_f : \mathbb{R}^d \to L^p$ définie par $T_f(a) = \tau_a f$ est uniformément continue.

a) Montrer que $\|\tau_a f - \tau_b f\|_p = \|\tau_{a-b} f - f\|_p$. En déduire qu'il suffit d'établir la continuité de T_f en 0.

b) Montrer la propriété cherchée en supposant dans un premier temps que f est continue à support compact dans $\mathbb{R}^d$.

c) Conclure dans le cas général par un argument de densité.

d) Application : Si $f \in L^p$ et φ_n est une approximation de l'unité alors $\lim\limits_{n\to\infty} f * \varphi_n = f$ dans L^p.

Exercice 7. Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ et Ω un voisinage quelconque de K.

a) Montrer qu'il existe un fonction lisse φ à support compact dans Ω et qui est égale à 1 au voisinage de K.

b) Soit f continue et à support dans K. Montrer qu'il existe une suite f_n de fonctions lisses à support dans Ω qui converge uniformément vers f.

c) Soit $1 \leq p < \infty$ et $f \in L^p$ nulle en dehors de K. Montrer qu'il existe une suite f_n de fonctions lisses à support dans Ω qui converge vers f dans L^p.

d) Soit $1 \leq p \leq q < \infty$ et $f \in L^p \cap L^q$ nulle en dehors de K. Montrer qu'il existe une suite f_n de fonctions lisses à support dans Ω qui converge vers f dans L^p et dans L^q.

Exercice 8. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $1 < p < \infty$ et q son exposant conjugué. Montrer que pour tout $f \in L^p(\Omega)$

$$\|f\|_p = \sup_{\substack{\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \\ \|\varphi\|_q = 1}} \Big| \int_\Omega f\varphi \Big|.$$

Le sup qui apparaît au-dessus est-il toujours atteint ?

Exercice 9. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Montrer que l'application $L^1(\mathbb{R}^d) \ni g \mapsto f * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ est linéaire et continue sur $L^1(\mathbb{R}^d)$ et déterminer sa norme.