Feuille 17
Topologie.

Seule la topologie des espaces métriques est au programme de l'agrégation.

Exercice 1. Vrai ou faux
Soient X et Y des espaces métriques. Déterminer si les énoncés suivants sont vrais ou faux.

1. Les boules ouvertes sont ouvertes, les boules fermées sont fermées.
2. L'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée de mêmes centre et rayon.
3. L'intérieur d'une boule fermée est la boule ouverte de mêmes centre et rayon.
4. On suppose X séparable. Alors tout sous-ensemble de X est séparable.

Exercice 2. Continuité automatique
Soient X et Y deux espaces métriques, et $f : X \to Y$ une bijection continue. On suppose X compact. Montrer que f^{-1} est continue.

Exercice 3. Compact $\iff$ complet et précompact
Soit X un espace métrique. Montrer que X est compact si et seulement si X est complet et si pour tout $\varepsilon > 0$, X peut-être recouvert par un nombre fini de boules de rayon ε.

Exercice 4. Orbite d'une fonction continue sous les translations
On considère l'espace $X = C_b(\mathbf{R})$ des fonctions continues bornées de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, muni de la norme du supremum. Soit $f \in X$. Pour $t \in \mathbf{R}$, on note f_t la fonction $x \mapsto f(x-t)$. On note enfin $O_f = \{f_t \,:\, t \in \mathbf{R}\}$.

1. Montrer que X n'est pas séparable.
2. On suppose f uniformément continue. Montrer que O_f est séparable.
3. On suppose O_f séparable. Soit (f_{t_n}) une suite dense dans O_f.
   (a) Soit $\varepsilon > 0$. Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $F_n = \{t \in \mathbf{R} \,:\, \|f_t - f_{t_n}\| \leqslant \varepsilon\}$. Montrer que F_n est fermé dans $\mathbf{R}$.
   (b) En déduire que f est uniformément continue.
   Indication. *On pourra utiliser le théorème de Baire (hors programme, mais qui apparaît néanmoins régulièrement dans les sujets d'écrit) : dans un espace complet, une union dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.*

Exercice 5. Topologie des groupes de matrices

1. Montrer que $\mathsf{GL}(n, \mathbf{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbf{R})$.
2. Montrer que le groupe $\mathsf{SO}(n)$ est connexe par arcs.
   Indication. *On pourra commencer par expliciter un arc reliant deux réflexions.*
3. Quelles sont les composantes connexes de $\mathsf{GL}(n, \mathbf{R})$?
4. Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ un polynôme non constant. Montrer que $\{\lambda \in \mathbf{C} : P(\lambda) \neq 0\}$ est connexe par arcs.
5. Quelles sont les composantes connexes de $\mathsf{GL}(n, \mathbf{C})$?

Exercice 6. Grassmanniennes
Soit $n \geqslant 1$. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbf{R}^n$, et X l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$. Si $E \in X$, on note P_E la projection orthogonale sur E.

1. Montrer que l'on définit une distance sur X par la formule
$$d(E, F) = \sup\{\|P_E(x) - P_F(x)\| : \|x\| \leqslant 1\}.$$
2. Quelles sont les composantes connexes de (X, d) ?

Exercice 7. Classes d'homéomorphisme de l'alphabet

On considère les lettres de l'alphabet comme des (réunions de) courbes dans $\mathbf{R}^2$, comme suit.

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

Classifier ces 26 espaces métriques à homéomorphisme près.

Exercice 8. Théorème de Tychonoff dénombrable

Soit (E_n, d_n) une suite d'espaces métriques non vides et $E = \prod E_n$ le produit cartésien infini. On définit pour $x, y \in E$

$$d(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \min(d_n(x_n, y_n), 2^{-n}).$$

1. Montrer que d est une distance.
2. Montrer que (E, d) est compact si et seulement si (E_n, d_n) est compact pour tout n.

Référence : H. Queffélec, Topologie