Feuille 18
Espaces de Hilbert.

Dans toute la feuille d'exercices, H désigne un espace de Hilbert réel et sa norme est notée $\|\cdot\|$.

Exercice 1. Identité du parallélogramme

Montrer l'égalité suivante, dite *identité du parallélogramme* (pourquoi ?), valable pour $x, y \in H$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right). \tag{1}$$

Exercice 2. Opérateur adjoint

Soit $T : H \to H$ une application linéaire continue. On rappelle que la norme d'opérateur de T est définie comme $|||T||| = \sup\{\|Tx\| : x \in H, \|x\| \leqslant 1\}$.

1. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $T^* : H \to H$ telle que, pour tous $x, y \in H$, on a
$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$$
2. Montrer que $|||T^*||| = |||T|||$ et que $(T^*)^* = T$.
3. (*) On suppose que $T = T^*$. Montrer que $|||T||| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in H, \|x\| \leqslant 1\}$.

Exercice 3. Théorème de projection sur un convexe fermé

Soit $C \subset H$ un convexe fermé non vide.

1. Montrer que pour tout $x \in H$ il existe un unique élément $y \in C$ (noté $P_C(x)$ par la suite) tel que
$$\|x-y\| = \inf\{\|x-z\| : z \in C\}.$$
Indication : *considérer une suite* (y_n) *dans* C *approchant l'infimum et montrer qu'elle converge en appliquant* (1) *à* $(x-y_p, x-y_q)$.
2. Soit $x \in H$. Montrer que $P_C x$ est caractérisé comme étant l'unique point $y \in C$ vérifiant
$$\langle z-y, x-y\rangle \leqslant 0$$
pour tout $z \in C$.
3. Montrer que l'application $P_C : H \to H$ ainsi définie est continue. Montrer qu'elle est linéaire si et seulement si C est un sous-espace vectoriel de H.
4. Application. Soit $a < b$ deux réels. Dans l'espace de Hilbert $H = L^2([0,1])$, on considère le sous-ensemble
$$C = \{f \in L^2([0,1]) : a \leqslant f \leqslant b \text{ presque partout}\}.$$
Vérifier que C est convexe et fermé, et déterminer $P_C g$ pour $g \in H$.

Exercice 4. Ondelettes

Soit $\psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ -1 & \text{si } 1/2 < t \leqslant 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $x \in \mathbf{R}$ et $k, n \in \mathbf{Z}$, on pose $\psi_{n,k}(x) = 2^{n/2}\psi(2^n x - k)$.

1. Montrer que la famille $\{\psi_{n,k} : k \in \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{Z}\}$ est orthonormée dans $L^2(\mathbf{R})$.
2. Soit $f \in L^2(\mathbf{R})$ vérifiant $\langle f, \psi_{n,k}\rangle = 0$ pour tous $k, n \in \mathbf{Z}$.
   (a) Montrer que $\int_0^{2^n} f = 2^n \int_0^1 f$ pour tout n, puis en déduire que $\int_0^1 f = 0$.
   (b) Montrer que $\int_0^x f = 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.
   (c) En déduire que la famille $\{\psi_{n,k} : k \in \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{Z}\}$ est une base orthonormée de $L^2(\mathbf{R})$. *On utilisera librement le résultat suivant : si* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *est une fonction localement intégrable, alors la fonction* $F := x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ *est dérivable et* $F' = f$ *presque partout.*

Exercice 5. Théorème ergodique de von Neumann

Soit $T : H \to H$ une application linéaire vérifiant $|||T||| \leqslant 1$. Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $S_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} T^k$. On veut montrer que pour tout $x \in H$,

$$\lim_{n\to\infty} S_n x = Px$$

où P désigne le projecteur orthogonal sur le sous-espace $\ker(\mathrm{Id} - T)$.

1. Montrer que $\ker(\mathrm{Id} - T) = \ker(\mathrm{Id} - T^*)$, et en déduire que $H = \ker(\mathrm{Id} - T) \oplus \overline{\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - T)}$.
2. Montrer que $S_n(x)$ tend vers 0 pour $x \in \overline{\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - T)}$.
3. Conclure.
4. Est-il vrai que $\lim_{n\to\infty} |||S_n - P||| = 0$?

(*) **Application.** Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction mesurable bornée 2π-périodique et $\alpha \in \mathbf{R} \setminus 2\pi\mathbf{Q}$. Déterminer la limite dans $L^2([0, 2\pi])$ de la suite de fonctions (f_n) définie par

$$f_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(x + n\alpha).$$

Exercice 6. Réciproque de l'identité du parallélogramme

Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach tel que l'identité (1) est satisfaite pour tous x, y dans X. Montrer que X est un espace de Hilbert.

Indication. *Considérer la fonction* $B : (x, y) \mapsto \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$ *et montrer que* $B(x, y) = B(y, x)$, $B(x, -y) = -B(x, y)$ *et* $B(x + y, z) = B(x, z) + B(y, z)$ *— pour ce dernier point appliquer* (1) *à* (x, y), $(x + z, y + z)$ *et* $(x + y + z, z)$.

Exercice 7. Autour du théorème de Lax–Milgram

Soit $a : H \times H \to \mathbf{R}$ une forme bilinéaire symétrique, continue et coercive (c'est-à-dire telle qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $a(x, x) \geqslant \alpha\|x\|^2$ pour tout $x \in H$). On se donne également une forme linéaire continue $\ell : H \to \mathbf{R}$.

1. Montrer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que pour tous $x, y \in H$, on ait
$$|a(x, y)| \leqslant M\|x\|\|y\|.$$
2. Montrer le théorème de Lax–Milgram : il existe un unique $u \in H$ tel que l'on ait $a(u, v) = \ell(v)$ pour tout $v \in H$.
3. Soit $V \subset H$ un sous-espace vectoriel fermé et soit u la solution de $a(u, v) = \ell(v)$ pour tout $v \in H$.
   (a) Montrer qu'il existe un unique $u_0 \in V$ vérifiant $a(u_0, v) = \ell(v)$ pour tout $v \in V$. Montrer que $\|u_0\| \leqslant |||\ell|||/\alpha$.
   (b) Montrer l'inégalité
$$\|u - u_0\| \leqslant \frac{M}{\alpha} \inf\{\|u - v\| : v \in V\}.$$