Feuille 19

Applications linéaires entre espaces de Banach

Dans toute la feuille X, Y, Z sont des espaces de Banach. On note B_X la boule-unité fermée de l'espace X. On note $L(X,Y)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de X dans Y. On rappelle que $L(X,Y)$ est un espace de Banach quand il est muni de la norme d'opérateur $|||T||| = \sup\{\|Tx\| \,:\, x \in B_X\}$.

On désigne par $C([0,1])$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ et par $C_0(\mathbf{R})$ l'espace des fonctions continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, tendant vers 0 en $+\infty$ et $-\infty$. Ces deux espaces sont munis de la norme du supremum.

Exercice 1.

Donner un exemple d'un espace de Banach X et d'une application linéaire continue $T : X \to X$ qui est injective et non surjective. Même question avec « surjective et non injective ».

Exercice 2.

Montrer que l'ensemble des applications linéaires inversibles est ouvert dans $L(X,X)$.

Exercice 3.

Soit $T : C([0,1]) \to C([0,1])$ une application linéaire ayant la propriété suivante : $f \geqslant 0$ implique $(Tf) \geqslant 0$. Montrer que T est continue. Même question avec $T : C_0(\mathbf{R}) \to C_0(\mathbf{R})$.

On dit que $T \in L(X,Y)$ est compact si $\overline{T(B_X)}$ est compact dans Y.

Exercice 4.

Montrer qu'une application linéaire de rang fini est compacte.

Exercice 5.

Soit $S \in L(X,Y)$ et $T \in L(Y,Z)$. Montrer que si S ou T est compact, alors TS est compact.

Exercice 6.

On fixe $g \in C([0,1])$. Pour $f \in C([0,1])$ et $x \in [0,1]$, on pose

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que T définit une application linéaire continue et compacte sur $C([0,1])$.

Exercice 7.

On note $K(X,Y)$ l'ensemble des applications linéaires compactes de X dans Y. Montrer que $K(X,Y)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $L(X,Y)$.

Indication : On pourra utiliser le résultat suivant (Exercice 3 de la feuille 17). *Soit E un espace métrique complet. Une partie $A \subset E$ est relativement compacte si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, A peut-être recouverte par un nombre fini de boules de rayon ε.*

Exercice 8.

Pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$, on note ℓ_p l'espace des suites de puissance p-ème sommable (ou des suites bornées pour $p = +\infty$) muni de la norme usuelle

$$\|(x_n)_{n\geqslant 1}\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} & \text{si } 1 \leqslant p < \infty \\ \sup_n |x_n| & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Pour $(\lambda_n)_{n\geqslant 1} \in \ell_\infty$, on considère l'application linéaire $T : \ell_p \to \ell_p$ définie par $T((x_n)_{n\geqslant 1}) = (\lambda_n x_n)_{n\geqslant 1}$. Vérifier que T est continue, puis montrer l'équivalence

$$T \text{ compact} \iff \lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0.$$